Math. A 1
49 h 2
Brewer

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch

der

Mechanik.

Von

Johann Paul Brewer,

Professor der Mathematik und Physik in Düsseldorf.

Zweiter Theil.

Die Lehre von der Wirkung der Kräfte auf feste Körper, insofern sie eine Bewegung hervorbringen.

Mit fünf Steindrucktafeln.

Düsseldorf,
bei Joh. Eckhardt Schaub.
1830.

Die Lehre
von der
Bewegung fester Körper.

Von

Johann Paul Brewer,

Professor der Mathematik und Physik in Düsseldorf.

Mit fünf Steindrucktafeln.

Düsseldorf,
bei Joh. Eckhardt Schaub.
1830.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Aus der Brede'schen Officin in Offenbach.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Das günstige Urtheil, welches sachkundige Männer über den ersten Theil dieser Schrift ausgesprochen, hat mich ermuntert, auf die Ausarbeitung dieses zweiten einen um so größern Fleiß zu verwenden. Auch glaube ich, daß Jeder, der den Inhalt desselben mit Sorgfalt durchgegangen, und sich damit gehörig vertraut gemacht hat, nicht allein eine allgemeine Uebersicht über den jetzigen Standpunkt der Wissenschaft erworben hat, sondern, daß er auch, wenn er nur mit der gehörigen Kenntniß der Differential- und Integralrechnung ausgerüstet ist, die classischen Werke über die Wissenschaft, die von Euler, Lagrange, Laplace, Poisson u. s. f. ohne Anstoß zu verstehen im Stande ist. Den Gebrauch der Differential- und Integralrechnung habe ich aus Gründen, die schon in der Vorrede zum ersten Theil angeführt

worden, gänzlich vermieden, und doch, glaube ich, wird man bei gehöriger Vergleichung finden, daß diese Schrift an Inhalt reicher ist, als z, B. Kästner's höhere Mechanik. — Der eigentlichen Dynamik (der Lehre von den bewegenden Kräften) habe ich im ersten Abschnitt einige allgemeine phoronomische Sätze über die Bewegung, an und für sich betrachtet, vorangeschickt. Insbesondere habe ich für den wichtigen Satz, daß man jede Bewegung eines Körpers als aus der progressiven und rotatorischen zusammengesetzt, ansehen kann, (§. 13 — 16) einen Beweis gegeben, der, wie mir scheint, an Gründlichkeit Nichts zu wünschen übrig läßt, und dabei völlig elementar ist. Aus Mangel an gehörigen Kenntnissen in diesem Punkt bleibt besonders bei der schwierigen Lehre von der Umdrehung der Körper nicht allein dem Anfänger, sondern selbst dem Geübtern Manches dunkel, so wie denn bekanntlich ein berühmter Philosoph und Mathematiker behauptete, der Mond drehe sich nicht um seine Achse, weil er uns immer dieselbe Fläche zukehrt. Bei der Lehre von der Wirkung, Eintheilung und Vergleichung der Kräfte (im zweiten Abschnitt) bin ich vorzüglich den Ansichten von Kästner, Karsten u.s.f. gefolgt, nach welchen, wie ich glaube, der Gegenstand nicht allein am gründlichsten, sondern auch für den Anfänger am deutlichsten dargestellt wird. Im dritten und vierten Abschnitt findet man die Lehre von der Bewegung der frei

fallenden und der frei geworfenen Körper, so wie in den meisten Lehrbüchern. Der fünfte Abschnitt handelt umständlich von den Centralkräften und der allgemeinen Schwere. Er enthält überhaupt einen kurzen Abriß der physischen Astronomie, so wie man denn die Keplerschen Gesetze daselbst aus Gründen der Mechanik hergeleitet findet. Bei diesem Gegenstand vorzüglich war es mir fühlbar, daß ich mir den Gebrauch der höhern Analysis untersagt hatte. Ich war, um diesem Mangel abzuhelfen, genöthigt, zu einigen ältern Naturforschern, Newton, S. Gravesande u. s. f. zurückzukehren, deren Darstellungsart ich hierin vorzüglich gefolgt bin. Da ich fand, daß bei der Lehre von der Schwungkraft nicht allein die Schüler, sondern sogar die Meister *) hin und wieder Zweifel, und selbst unrichtige Ansichten hegen, so habe ich es für nöthig gehalten, mich etwas umständlicher darüber zu verbreiten. Ich hoffe, daß nach der Art, wie ich (§. 44—46) die Sache dargestellt, und besonders nach dem, was §. 46. Anmerk. 1 gesagt worden, Niemand mehr eine Schwierigkeit dabei finden wird. Im sechsten Abschnitt habe ich die Lehre sowohl vom einfachen, als zusammengesetzten Pendel ausführlich behandelt. Ich habe die Gesetze von der Bewegung des ersten aus den Eigenschaften der Cykloide hergeleitet, welche

*) Man sehe Gehler's Physikal. Wörterbuch (ältere Ausgabe von 1798) Artik. Centralkräfte.

man in meinem Lehrbuch der Geometrie (Anhang II. S. 338—345) *) und zwar ebenfalls durch elementare Gründe, erwiesen findet. Bei der Lehre vom zusammengesetzten Pendel habe ich zur Bestimmung des Moments der Trägheit die in meinem Lehrbuch der Buchstaben-Rechenkunst (§. 74. Anmerk.) erklärte Methode, die Summe der Potenzen der ganzen Zahlen zu finden, benutzt, wovon auch schon im ersten Theil dieser Schrift, bei Bestimmung des Schwerpunkts, ein nützlicher Gebrauch gemacht worden ist. Diese Methode vertritt, wie man sich bei der Vergleichung überzeugen wird, hierbei fast ganz die Stelle der Integralrechnung, so daß sich vermittelst derselben fast für jeden Körper das Moment der Trägheit finden läßt. Ueberhaupt habe ich, um bei diesem wichtigen Gegenstand nichts Wesentliches unberührt zu lassen, die Methode, von einer Achse zur andern überzugehen, worauf sich endlich die Lehre von den drei mechanischen Hauptachsen gründet, (§. 74.) umständlich erläutert. Auch die Theorie des Inversionspendels, wovon man in der neuesten Zeit einen so wichtigen Gebrauch zur Bestimmung des Sekundenpendels gemacht, so wie

*) Ich habe an den Stellen dieser Schrift, wo ich etwa von schwierigen Sätzen der analytischen Geometrie Gebrauch gemacht, die Art, sie herzuleiten, kurz gezeigt. Gern würde ich auch die Beweise für die Eigenschaften der Cykloide dieser Schrift beigefügt haben, hätte ich nicht gescheut, das Nämliche zweimal drucken, also auch zweimal bezahlen zu lassen.

die des Centrifugalpendels, findet man (§ 83. u. §. 86.) auf eine elementare Weise erläutert. Der nun folgende siebente Abschnitt behandelt den schwierigsten Gegenstand der ganzen Mechanik, nämlich die Lehre von der Umdrehungsbewegung der Körper sowohl um feste, als freie Achsen. Nachdem zuerst die Wirkung der Schwungkräfte auf feste Achsen untersucht worden, folgt (§. 91.) der Beweis des wichtigsten Satzes der ganzen Mechanik, daß es für jeden Körper drei Achsen der freien Umdrehung gibt. Ich bin hierbei vorzüglich Euler (theor. mot. corpor. rigidor. Cap. V.) gefolgt, dessen Darstellung mir, besonders da man bei deutschen Lesern nicht immer auf eine hinreichende Kenntniß der analytischen Geometrie zählen kann, die einfachste zu seyn schien. Die Betrachtung des Größten und Kleinsten, welche Euler dabei gebraucht, ist ganz überflüssig, und kann, ohne der Darstellung im mindesten etwas an Gründlichkeit zu nehmen, völlig wegbleiben. Indessen habe ich es für nöthig gefunden, den Beweis überhaupt noch in Etwa zu ergänzen. Derselbe gründet sich bekanntlich darauf, daß jede Kubische Gleichung wenigstens Eine mögliche Wurzel hat. Allein in dem Falle, wovon wir hier reden, hat der Coefficient der dritten Potenz der gesuchten Größe für die verschiedenen Körper einen verschiedenen Werth, so daß derselbe wohl in einzelnen Fällen Null werden kann, wodurch also die Gleichung aufhört, eine Kubische zu seyn.

Ich habe daher, um diese Lücke auszufüllen, zu zeigen gesucht, daß sich für jeden Körper Achsen finden lassen, wofür der eben genannte Coefficient nicht Null wird. Die Nothwendigkeit, den angeführten Hauptsatz der Mechanik vor jedem Zweifel zu sichern, scheint mir den (§. 91. Anm.) beigefügten, freilich etwas weitläufigen Beweis wohl zu rechtfertigen. Was den Druck betrifft, den die Achse nicht allein von den Schwungkräften, sondern auch von solchen Kräften erleidet, welche den umdrehenden Körper wirklich beschleunigen, so scheint mir, durch Einführung der Elementarkräfte, so wie es von Euler in seinem schon angeführten Werke (theor. mot. corp. rigidor.) geschieht, der Gegenstand am gründlichsten behandelt werden zu können. Ich glaube sogar, daß durch meine Art der Darstellung (§. 92.) die Sache noch etwas näher erhellt und außer allen Zweifel gesetzt wird. Nachdem alles dieses vorausgeschickt worden, ließe sich nun die Auflösung der schwierigen Anfgabe, die Umdrehung und Bewegung eines völlig freien Körpers zu finden, wenigstens für einige leichtere Fälle geben. Noch findet man in diesem Abschnitt eine umständliche Auseinandersetzuug des Grundsatzes des d'Alembert, woraus sich denn die Lehre von der Bewegung des Schwerpunkts eines auch völlig freien Körpers, worauf Kräfte an willkührlichen Punkten und nach willkührlichen Richtungen wirken, auf eine einfache Weise herleiten ließ. Ueberhaupt hoffe ich,

werden die Kenner der Wissenschaft beim Durchlesen dieses Abschnitts finden, daß ich in demselben nicht allein, soviel als ohne Anwendung der höhern Analysis billig erwartet werden kann, geleistet, sondern mich auch bemüht habe, schon hier manchen Zweifeln und Schwierigkeiten zuvorzukommen, welche dem denkenden Anfänger, wenn er diesen Gegenstand aus den Werken von Euler, Poisson *) u. s. f. zu studiren versucht, sicher auf-

---

*) Wegen der Wichtigkeit und des häufigen Gebrauchs des Werks von Poisson (traité de Mécanique 2. tomes 1811.) will ich hier auf einen kleinen Irrthum, den dasselbe enthält, aufmerksam machen. Tom. II. Liv. III. chap. IV. §. 376. p. 127 sagt Poisson, die Umdrehungsgeschwindigkeit eines um einen festen Punkt beweglichen Körpers, ändere sich nicht, so lange die Umdrehungsachse ungeändert bleibt. Da an dieser Stelle von der Bewegung eines Körpers an und für sich ohne alle Rücksicht auf die Kräfte, wodurch sie hervorgebracht wird, die Rede ist, so ist die Behauptung offenbar irrig. Der Irrthum ist auf folgende Art entstanden: Wenn man die Winkel, welche die Umdrehungsachse mit drei im Körper angenommenen, sich festen Punkt rechtwinkelig schneidenden Achsen macht, der Ordnung nach α, β, γ, und drei andere Größen, deren Bedeutung man an der angeführten Stelle selbst nachsehen muß, p, q, r nennt, so ist

$$1)\ \cos.\alpha = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$2)\ \cos.\beta = \frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$3)\ \cos.\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Ueberdem ist die Umdrehungsgeschwindigkeit $= \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$. Poisson sieht nun die Größen p, q, r als durch $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$,

stoßen werden. — Der achte Abschnitt enthält die Lehre vom Stoße. Außer dem geraden und centralen Stoße ist auch der schiefe und excentrische kurz berührt. Vorzüglich aber ist die Aufgabe von der Umdrehungsbewegung, die ein um eine Achse beweglicher Körper durch den Stoß eines andern erhält, behandelt, wobei zugleich die von Robins zuerst angewendete Methode, die Geschwindigkeit der Geschützkugeln zu finden, in ihren Grundsätzen erläutert ist. (§. 109.) handelt ausführlich von dem Mittelpunkt des Stoßes, wobei ich wieder Gelegenheit genommen, (Anmerk. 2.) einige Mißverständnisse und irrige Ansichten, wovon mehrere ausgezeichnete Mathematiker sich nicht frei gehalten haben, aufzuklären und zu berichtigen. Der Anhang, welcher den Schluß des Ganzen macht, behandelt einen sowohl für die Naturlehre überhaupt, als auch für die mathematische und physische Geographie insbesondere überaus wichtigen Gegenstand, nämlich die Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels. In so vielen Lehrbüchern auch von den Gesetzen der Pendelbewegung gehandelt wird, so findet

---

$\cos.\gamma$ völlig bestimmt an, wo denn freilich auch $\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$ völlig bestimmt seyn würde. Allein ersteres ist nicht der Fall, wie man sich leicht überzeugt, wenn man bedenkt, daß $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$ sich nicht ändern, wenn man jede der Größen p, q, r mit derselben Zahl multiplicirt; oder auch, wenn man aus den Gleichungen 1, 2, 3 die Werthe von p, q, r sucht.

man doch fast in keinem einzigen die Methode, die Länge des Sekundenpendels zu finden, gehörig erklärt. Ich habe daher den dazu erforderlichen Apparat, so wie die Methode, denselben zu gebrauchen, mit allen Vorsichtsmaßregeln und Correctionen vollständig beschrieben, wobei ich vorzüglich Biot (astronom. phys. tom. 3.) gefolgt bin. Auch hierbei habe ich durchaus nichts aus der Integral- und Differentialrechnung als bekannt vorausgesetzt. Zwar wird Jeder, der Pendelbestimmungen zu machen gedenkt, wohl thun, sich vorher mit dieser Rechnung bekannt zu machen. Allein es ist nützlich, daß der Anfänger schon frühzeitig einen Begriff von der außerordentlichen Genauigkeit, womit jetzt Messungen ausgeführt werden, so wie auch von den Mitteln erhält, wodurch dieses möglich geworden. Ich habe den Inhalt dieser Schrift etwas umständlicher angegeben, damit sowohl der billige Beurtheiler um so leichter den Standpunkt erkenne, aus welchem ich dieselbe angesehen wünschte, als auch der Leser schon von Anfang näher wüßte, was er darin zu suchen habe. In der Hoffnung, daß dieselbe ebenfalls etwas zur Verbreitung des Studiums der Naturlehre auf den deutschen Schulen und Hochschulen beitragen möge, übergebe ich sie dem Publikum mit der Versicherung, daß es nicht an meinem Fleiße gelegen hat, wenn ich den beabsichtigten Zweck nicht erreicht habe. Sollte dieselbe sich einer günstigen Aufnahme er-

freuen, so werde ich ihr vielleicht noch einen dritten Theil über den Druck und die Bewegung der flüssigen Körper folgen lassen.

Düsseldorf im April 1830.

J. P. Brewer.

Inhaltsanzeige.

Seite

Erster Abschnitt. Von der Bewegung an und für sich betrachtet, ohne Rücksicht auf die Kräfte, wodurch sie hervorgebracht wird. 1

Zweiter Abschnitt. Von den verschiedenen Arten der bewegenden Kräfte und dem Maß derselben. 28

Dritter Abschnitt. Von der Bewegung der frei fallenden Körper, so wie von der gleichförmig beschleunigten Bewegung überhaupt. 38

Vierter Abschnitt. Von der Bewegung der nach einer beliebigen Richtung frei geworfenen Körper 51

Fünfter Abschnitt. Von den Centralkräften und der allgemeinen Schwere. 61

Sechster Abschnitt. Von der Bewegung auf vorgeschriebener Bahn überhaupt, und von der Schwungsbewegung der Pendel insbesondere. 102

Seite

Siebenter Abschnitt. Von der Umdrehungsbewegung überhaupt. 173

Achter Abschnitt. Vom Stoße der Körper 222

Anhang. Von der Bestimmung der Länge des Sekundenpendels. 244

Erster Abschnitt.

Von der Bewegung an und für sich betrachtet, ohne Rücksicht auf die Kräfte, wodurch sie hervorgebracht wird.

§. 1.

Was man unter Mechanik überhaupt, unter dem Ort und der Bewegung eines Punktes, unter Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung u. s. f. versteht, ist schon in der Einleitung zum ersten Theil dieses Werks erklärt worden. Ebendaselbst ist von der Eintheilung der Mechanik, von dem Wesen der Materie und der Körper, so wie auch von den allgemeinen Eigenschaften der letztern ausführlich gehandelt worden. Indem wir den Leser dahin verweisen, wollen wir hier nur so viel, als nöthig ist, damit dieser zweite Theil nicht aus dem Zusammenhang gerissen erscheine, und für sich verständlich bleibe, kurz wiederholen.

§. 2.

Jeder Punkt, den man im Innern, oder auf der Oberfläche eines Körpers annehmen kann, existirt irgendwo im Raume. Dieses Irgendwo, welches sich nicht näher bestimmen läßt, heißt der Ort, oder auch der absolute Ort desselben. Bezieht man das Irgendwo, wo ein Punkt sich befindet, nicht auf den absoluten Raum, sondern auf einzelne Punkte, die ihre Lage gegeneinander nicht ändern, so heißt der so bestimmte Ort der relative Ort des Punktes. Derselbe bleibt also

ungeändert, so lange der Punkt seine Lage gegen die angenommenen Punkte nicht ändert.

§. 3.

Bewegung ist eine stetige Veränderung des Orts. Verändert ein Punkt seinen absoluten Ort, so ist er in absoluter, verändert er seinen relativen Ort, so ist er in relativer Bewegung. — In dem Wege, den ein bewegter Punkt durchläuft, um von einem Orte zu einem andern zu gelangen, kann man eine unendliche Menge von Oertern oder Punkten annehmen. Der bewegte Punkt kann nicht von dem ersten zum letzten gelangen, ohne in allen, in seinem Wege zwischen dem ersten und letzten Ort oder Punkt gelegenen Oertern, oder Punkten, gewesen zu seyn. Liegen alle diese Zwischenpunkte, die er nach und nach erreicht, in gerader Linie, so heißt die Bewegung zwischen den beiden angenommenen äußersten Punkten eine geradlinige. Liegen aber durchaus keine drei Punkte der Bahn, die er durchläuft, in gerader Linie, so heißt seine Bewegung eine krummlinige. Der erste Fall ist der einfachste, worauf zugleich alle andern Fälle zurückgebracht werden müssen. Ist nun der Weg eines bewegten Punktes eine gerade Linie ab, so entfernt er sich bei seiner Bewegung entweder immer von a und nähert sich b, oder er entfernt sich von b und nähert sich a, oder er thut abwechselnd bald das Eine, bald das Andere. In den beiden ersten Fällen heißt die gerade Linie, welche der bewegte Punkt durchläuft, von dem Punkt, wovon er ausgeht, nach demjenigen, wohin er geht, gerechnet, seine Richtung. Der dritte Fall ist offenbar aus den beiden ersten Fällen zusammengesetzt. Der Punkt ändert nämlich so oft seine Richtung, als er anfängt sich einem andern von den beiden Endpunkten der Linie ab zu nähern. Ist die Bewegung eines Punktes krummlinig, so kann man sich seine Bahn als aus einer unendlichen Menge von geraden Linien zusammengesetzt denken. Jede dieser geraden Linien von dem Endpunkt, wovon der bewegte Punkt ausgeht, nach demjenigen, wohin er geht, betrachtet, ist also (nach dem eben Erklärten) seine Richtung. Dieselbe ist also in jedem andern

Zeitpunkt auch eine andere. Für jeden bestimmten Zeitpunkt aber ist sie die gerade Linie, welche den Ort desselben mit dem unmittelbar darauf folgenden verbindet, von dem ersten nach dem letzten hin gerechnet, welche Linie mit der Tangente der krummen Linie zusammenfällt.

§. 4.

Außer der Größe und Gestalt des Weges, den ein bewegter Punkt durchläuft, und der Richtung, die er an jeder Stelle hat, kommt es noch auf die Zeit an, worin er diesen Weg theils ganz, theils in seinen einzelnen Theilen, durchläuft. Durchläuft er während seiner Bewegung in gleichen Zeiten, man mag diese so groß oder klein annehmen, als man will, gleiche Räume oder gleiche Theile seines Wegs, so heißt seine Bewegung gleichförmig (mouvement uniforme), sonst ungleichförmig (mouvement varié). Bei der gleichförmigen Bewegung kann man, wenn der Weg, den der Punkt in einer bestimmten Zeit durchläuft, bekannt ist, denjenigen, den er in jeder andern gegebenen Zeit durchläuft, nach der Proportionsregel finden. Da er nämlich in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft, so verhalten sich die in zwei Zeiten durchlaufenen Räume, wie die Zeiten. Setzt man daher den in einer Zeit t von dem Punkt durchlaufenen Raum $= S$, den in einer andern Zeit t', durchlaufenen s', so hat man

1) $t : t' = S : S'$

also 2) $S' = \frac{S . t'}{t}$

Die Eigenschaft eines bewegten Punktes bei gleichförmiger Bewegung in einer bestimmten Zeit einen bestimmten Raum zu durchlaufen heißt Geschwindigkeit (celeritas, velocitas, celérité, vitesse). Sobald man also den Raum kennt, den ein gleichförmig bewegter Punkt in einer bestimmten Zeit durchläuft, kennt man seine Geschwindigkeit. An und für sich ist es gleichgültig, für welche Zeit man den durchlaufenen Raum angibt, indem man, nach dem so eben Erklärten, den Raum für jede Zeit finden kann, wenn man ihn für irgend eine Zeit kennt. Um indessen die Geschwindigkeiten von zwei bewegten

Punkten vergleichen zu können, muß man den von beiden in derselben Zeit durchlaufenen Raum kennen. Um diese Vergleichung zu erleichtern, ist man übereingekommen, als Zeit, für welche man den durchlaufenen Raum angibt, eine Sekunde (mittlerer Zeit) anzunehmen. Unter Geschwindigkeit versteht man also dem gemäß den Raum, den ein gleichförmig bewegter Punkt in Einer Sekunde (mittlerer Zeit) durchläuft. Setzt man daher die Geschwindigkeit eines solchen Punktes (d. h. den in Einer Sekunde durchlaufenen Raum) $= c$, den in einer andern Zeit t von demselben durchlaufenen Raum $= s$, so hat man 3) $1 : t = c : s$

also 4) $s = c . t$

5) $\frac{s}{t} = c$

6) $\frac{s}{c} = t.$

Aus diesen vier Gleichungen kann man, wenn von den drei Größen t, c, s (Zeit, Geschwindigkeit und Raum) für einen gleichförmig bewegten Punkt drei bekannt sind, die vierte finden, wo nur zu bemerken, daß t in Sekunden ausgedrückt seyn muß.

Bei der ungleichförmigen Bewegung verhält es sich mit der Geschwindigkeit so, wie mit der Richtung bei der krummlinigen, d. h. der bewegte Punkt hat in jedem andern Augenblick auch eine andere Geschwindigkeit. Man kann daher nur von der Geschwindigkeit, die er in einem bestimmten Augenblick hat, reden. Man versteht alsdann unter der Geschwindigkeit desselben den Raum, den er in Einer Sekunde abmachen würde, wenn er die Bewegung, die er im Augenblick, wovon die Rede ist, hat, Eine Sekunde lang beibehielte. Wenn man z. B. sagt, die Geschwindigkeit einer Gewehrkugel in dem Augenblick, wo sie aus der Mündung fährt, sey = 1000 Fuß, so will man damit nicht sagen, daß sie in Einer Sekunde wirklich 1000 Fuß durchläuft, sondern nur, daß sie so viele Fuß durchlaufen würde, wenn sie die Bewegung, die sie in dem Augenblick, wo sie aus der Mündung fährt, hat, Eine Sekunde hindurch unverändert beibehielte. Obschon nämlich bei der ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit

keinen Augenblick sich gleich bleibt, so kann man doch, gerade wie man sich eine krumme Linie als aus unendlich vielen geraden zusammengesetzt denken kann, eine ungleichförmige Bewegung für die Dauer einer unendlich kleinen Zeit als gleichförmig ansehen. Berechnet man den Raum, den der Körper in Einer Sekunde durchlaufen würde, wenn er in allen folgenden, dem ersten gleichen, übrigens unendlich kleinen Zeittheilchen, denselben Raum, wie im ersten durchliefe, so ist dieses seine Geschwindigkeit.

§. 5.

Wenn bei einer Bewegung die Geschwindigkeit mit der Zeit immer zunimmt, oder wenn die in den folgenden Zeittheilchen durchlaufenen Räume immer größer und größer werden, so heißt die Bewegung eine beschleunigte (motus acceleratus, mouvement accéléré). Nimmt hingegen die Geschwindigkeit in den folgenden Zeittheilchen immer ab, so heißt die Bewegung eine verzögerte (motus retardatus, mouvement retardé). Nimmt die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten auch eben viel zu oder ab, so heißt die Bewegung eine gleichförmig veränderte, beschleunigte oder verzögerte (motus uniformiter acceleratus, sive retardatus, mouvement varié uniformement). Nimmt aber die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten bald mehr, bald minder zu oder ab, oder nimmt sie überhaupt bald zu, bald ab, so heißt die Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte.

§. 6.

Wenn die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte ist, so nennt man die Größe, um welche die Geschwindigkeit in Einer Sekunde zu- oder abnimmt, die Beschleunigung (acceleratio, accélération) oder Verzögerung (retardatio, retardation). Ist die Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte, so kann man nur von der Beschleunigung oder Verzögerung in einem bestimmten Augenblick sprechen, indem sich dieselbe für jeden Augenblick ändert. Allein, so wie man jede ungleichförmige Bewegung für die

Dauer eines unendlich kleinen Zeittheilchen als eine gleichförmige ansehen kann, so kann man auch eine ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte für ein solches Zeittheilchen als eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte ansehen. Man versteht dem gemäß unter Beschleunigung oder Verzögerung in einem gewissen Zeitpunkte die Größe, um welche die Geschwindigkeit in Einer Sekunde zu- oder abnehmen würde, wenn sie eine ganze Sekunde hindurch so zu- oder abnähme, wie in dem gewählten Zeitpunkt.

Anmerkung. Die Anfänger müssen wohl merken, daß die Geschwindigkeit noch immer zunehmen könne, obschon die Beschleunigung abnimmt.

§. 7.

Wenn ein Punkt sich in dem Umfang eines Kreises bewegt, so sagt man, er habe eine umdrehende Bewegung (motus rotatorius) um den Mittelpunkt desselben. Außer der Richtung eines solchen bewegten Punktes, die sich, wie schon (§. 3.) bemerkt worden, jeden Augenblick ändert, kommt es hier noch auf die Richtung der Umdrehung (die Umdrehungs-Richtung), die gewöhnlich ungeändert bleibt, an. Wenn man nämlich in dem Umfang des durchlaufenen Kreises, in unendlich kleinen, übrigens gleichen Entfernungen von dem Orte des bewegten Punktes a zwei Punkte b, c, und zwar jeden auf einer andern Seite von a annimmt, so kann der Punkt sich entweder so bewegen, daß er von a zuerst nach b, und dann erst später nach c, oder daß er zuerst von a nach c, und dann erst später nach b kommt. Hierdurch bestimmt sich die Richtung der Umdrehung (die Umdrehungs-Richtung). Diese ist also nur die Ordnungsfolge, nach welcher der bewegte Punkt von einem willkührlichen Punkte seiner Bahn zu zwei andern, ihm unendlich nahen Punkten, wovon jeder auf einer andern Seite desselben liegt, gelangt.

Anmerkung. Einige (unter andern Euler in seiner theoria motus corporum rigidorum seu solidorum) sagen, um anzudeuten, daß die Umdrehungs-Richtung a c b sey, die Umdrehung geschehe in dem Sinne a c b (in sensu a c b).

§. 8.

Wenn ein in einem Kreis umlaufender Punkt in gleichen Zeiten auch gleiche Bogen (also auch gleiche Winkel am Mittelpunkt) durchläuft, so heißt seine Umdrehung, oder Umdrehungs-Bewegung eine gleichförmige, sonst eine ungleichförmige. Ist die Umdrehungs-Bewegung eine gleichförmige, so heißt der Winkel am Mittelpunkt, den der bewegte Punkt in Einer Sekunde durchläuft, seine Umdrehungs-Geschwindigkeit. Die Größe dieses Winkels kann entweder in Graden, oder auch dadurch, daß man den zugehörigen Bogen in Theilen des Halbmessers ausdrückt, angegeben werden. Ist z. B. den Halbmesser $= 1$ gesetzt, die Umdrehungs-Geschwindigkeit $= \pi$, so durchläuft der bewegte Punkt in Einer Sekunde einen Halbkreis. Ist die Umdrehungsbewegung ungleichförmig, so kann man von ihrer Geschwindigkeit nur für einen gewissen Augenblick sprechen. Man versteht alsdann unter derselben (gerade wie es §. 3. für die Bewegung überhaupt bemerkt worden) den Winkel, den der bewegte Punkt in Einer Sekunde durchlaufen würde, wenn seine Umdrehungs-Bewegung während der Dauer Einer Sekunde so bliebe, wie sie in dem Augenblick, wofür man seine Umdrehungs-Geschwindigkeit bestimmen will, ist.

§. 9.

Nimmt die Umdrehungs-Geschwindigkeit in den folgenden Zeittheilchen immer zu, so heißt die Umdrehungs-Bewegung eine beschleunigte; nimmt aber ihre Geschwindigkeit in den folgenden Zeittheilchen beständig ab, so heißt sie eine verzögerte. Nimmt die Umdrehungs-Geschwindigkeit in gleichen Zeittheilchen um eben viel zu oder ab, so heißt sie eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte, sonst eine ungleichförmig oder eine unregelmäßig beschleunigte oder verzögerte. Die Größe, um welche die Umdrehungs-Geschwindigkeit einer gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung in Einer Sekunde zu- oder abnimmt, heißt die Umdrehungs-Beschleunigung oder Verzögerung.

§. 10.

Wir haben bis hierhin nur einen einzigen bewegten Punkt betrachtet. Wir wollen jetzt zu der Bewegung der Körper oder mehrerer Punkte, deren Lage gegeneinander unveränderlich bestimmt ist, übergehen.

1) Wenn Ein Punkt einer geraden Linie in Bewegung ist, so kann es unter allen Punkten derselben nur einen einzigen geben, der nicht in Bewegung ist. Denkt man sich nämlich Einen Punkt einer geraden Linie befestigt, so kann man ihr keine andere Bewegung, als eine solche ertheilen, wodurch sie sich um den festen Punkt dreht. Hierdurch werden aber alle Punkte der geraden Linie, den befestigten ausgenommen, in Bewegung gesetzt. Wenn daher zwei Punkte einer geraden Linie in Ruhe sind, so sind alle Punkte derselben, oder so ist die ganze Linie in Ruhe.

2) Wenn drei Punkte einer Ebene, die nicht in gerader Linie liegen, und deren Lage gegeneinander unveränderlich ist, in Ruhe sind, so sind alle Punkte der Ebene in Ruhe. — Denkt man sich nämlich zwei dieser Punkte durch eine gerade Linie verbunden, so ist diese in Ruhe. Die Ebene kann also keine andere Bewegung als eine umdrehende um diese Linie (als Achse) annehmen. Hierbei gerathen aber alle Punkte der Ebene, die nicht in dieser geraden Linie liegen, also auch der dritte von den drei Punkten in Bewegung. Ist dieser also auch in Ruhe, so ist die ganze Ebene in Ruhe. —

3) Wenn Ein Punkt einer Ebene in Bewegung ist, so kann in derselben höchstens Eine gerade Linie in Ruhe seyn. Gäbe es nämlich außer dieser geraden Linie noch Einen ruhenden Punkt, so gäbe es in der Ebene drei ruhende Punkte, welche nicht in gerader Linie lägen. Daher könnte kein Punkt der Ebene sich bewegen. — Wenn ein Punkt einer Ebene in Bewegung ist, so sind unendlich viele Punkte derselben in Bewegung.

4) Wenn drei, nicht in gerader Linie befindliche, Punkte eines Körpers in Ruhe sind, so sind alle Punkte desselben in Ruhe. — Alsdann ist nämlich die Ebene dieser Punkte in

Ruhe, und die Lage aller übrigen Punkte des Körpers gegen diese Ebene ist unveränderlich bestimmt.

5) Wenn Ein Punkt eines Körpers in Bewegung ist, so kann höchstens Eine gerade Linie desselben in Ruhe seyn. Gäbe es nämlich außerhalb dieser Linie noch einen ruhenden Punkt, so wären drei nicht in gerader Linie liegende Punkte in Ruhe. Folglich müßte der ganze Körper in Ruhe seyn. — Wenn daher Ein Punkt eines Körpers in Bewegung ist, so sind unendlich viele Punkte desselben in Bewegung.

§. 11.

Man sagt, eine Linie (sie sey gerade oder krumm), eine Fläche, ein fester Körper bewege sich, wenn unendlich viele Punkte davon in Bewegung sind. Dieses wird aber nothwendig der Fall seyn, wenn nur Ein Punkt davon in Bewegung ist.

§. 12.

Wenn alle Punkte einer Linie, Fläche, oder eines festen Körpers sich nach gleichen, parallelen Richtungen und mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen, so heißt die Bewegung eine fortschreitende, progressive (motus progressivus, mouvement progressif). Ist aber Ein Punkt, oder eine gerade Linie eines Körpers in Ruhe, während alle übrigen Punkte sich bewegen, so heißt seine Bewegung eine umdrehende (motus rotatorius, mouvement de rotation) um den unbewegten (festen) Punkt, oder um die feste Linie. Ist eine gerade Linie unbewegt, so heißt sie die Umdrehungsachse. Alsdann beschreiben alle außerhalb dieser Linie befindlichen Punkte des Körpers Kreise, deren Ebenen senkrecht auf der Umdrehungsachse sind, und deren Mittelpunkte in dieser Achse, und zwar da liegen, wo das von jedem Punkt auf die Achse gefällte Perpendikel dieselbe trifft. Dieses Perpendikel ist zugleich der Halbmesser des Kreises, den der zugehörige Punkt beschreibt. Bei einer solchen Umdrehung um eine Achse haben alle umlaufenden Punkte derselben Linie, Fläche, oder desselben Körpers, gleiche Winkelgeschwindigkeiten.

§. 13.

Wenn eine gerade Linie eines festen Körpers unbeweglich ist, so kann derselbe keine andere Bewegung als eine umdrehende um diese gerade Linie als Achse annehmen. Wenn daher eine gerade Linie eines festen Körpers unbeweglich ist, so kann man ihm jede Lage, die er anzunehmen fähig ist, dadurch geben, daß man ihn um diese gerade Linie als Achse bis zu einer gewissen Gränze herumdreht.

§. 14.

Wenn ein Punkt eines Körpers unbeweglich bleibt, so wird es, bei jeder willkührlichen Bewegung, die man dem Körper geben kann, allezeit noch einen andern Punkt desselben geben, der ebenfalls unbeweglich bleibt.

Beweis. I. c fig. 1. sey der als unbeweglich angenommene Punkt des Körpers. Um denselben als Mittelpunkt seyen in derselben (übrigens willkührlichen) Ebene mit demselben Halbmesser zwei sich völlig gleiche und deckende Kreise, wovon jeder durch a m d n vorgestellt werde, beschrieben. Einen dieser Kreise denke man sich im absoluten Raum völlig unbeweglich, der andere aber sey mit dem Körper fest verbunden, so daß er bei jeder Bewegung desselben eine analoge Bewegung annimmt.

II. Da beide Kreise (der bewegliche und unbewegliche) den Mittelpunkt c, ungeachtet der Bewegung, gemeinschaftlich behalten, so müssen sie auch nothwendig einen Durchmesser gemeinschaftlich behalten. Es wird also allezeit Einen Durchmesser des beweglichen Kreises geben, welcher, ungeachtet der Bewegung, in der Ebene des unbeweglichen geblieben ist. Die Linie m n stelle die Lage desselben vor der Bewegung, und a d die nach der Bewegung dar; d. h. der mit der Masse des Körpers fest verbundene Durchmesser m n sey durch die Bewegung aus der Lage m n in die a d gekommen.

III. Der Körper mag durch die Bewegung eine Lage erhalten haben, wie man will, so kann er immer in dieselbe dadurch gebracht werden, daß man zuerst den Durchmesser m n

in die Lage a d bringt, und dann den Körper um a d bis zu einer gewissen Gränze dreht. (§. 12.)

IV. Man denke sich zuerst, der Durchmesser m n sey so in die Lage a d gedreht worden, daß dabei alle Punkte des beweglichen Kreises a m d n in der Ebene des unbeweglichen geblieben sind, so wird man den Ort, wohin irgend ein Punkt γ des beweglichen Kreises nach dieser Bewegung gekommen ist finden, wenn man d f $=$ m γ nimmt.

V. Ist nun aber bei der wirklichen Bewegung der Punkt γ nicht nach f, sondern nach g außerhalb der Ebene m d n a gekommen, so wird man, wenn durch die (IV) angegebene Bewegung die Linie m n nach a d, also γ nach f gebracht worden, den Kreis d f n a m, um a d als Achse, noch um den Winkel f d g drehen müssen, um γ an seinen wahren Ort (g) zu bringen. Dieser Winkel f d g bestimmt die Größe der Umdrehung des Körpers um a d. Derselbe sey $= \varepsilon$.

VI. Man betrachte einen andern Punkt b des Körpers, der nicht in der Ebene, des mit dem Körper fest verbundenen, unbeweglichen Kreises m d f n a liegt. Durch denselben sey ein größter Halbkreis m b n gelegt, welcher gegen m d f n unter dem Winkel d m b $= \varphi$ geneigt ist. Wenn sich nun der Durchmesser m n, so wie (IV) angenommen worden (nämlich so, daß der bewegliche Kreis ganz in der Ebene des unbeweglichen bleibt) nach a d hindrehte, so würde man den Ort, wohin b durch diese Bewegung gebracht würde, finden, wenn man durch a d als Durchmesser einen größten Halbkreis legte, welcher gegen d f n a unter einem Winkel φ ($=$ d m b) geneigt wäre, und auf dem Umfang dieses Kreises von d aus ein Stück $=$ m b nähme, wo denn der Endpunkt dieses Stückes der Ort von b wäre. — Da indessen der Körper, um in die Lage, die er wirklich annimmt, zu kommen, um die Achse a d noch um den Winkel f d g $= \varepsilon$ gedreht werden muß (V), so wird man den wahren Ort β von b finden, wenn man, nachdem zuerst m n nach a d gebracht worden, durch a d einen größten Halbkreis d β a legt, welcher gegen d f n um einen Winkel f d $\beta = \varphi + \varepsilon$ geneigt ist, und nun d $\beta =$ m b nimmt.

VII. Die Buchstaben (fig. 2.) bedeuten durchaus dasselbe, wie (fig. 1.). Nur stelle (fig. 2.) o den Punkt β (fig. 1) dar, wohin der Punkt b (fig. 1.) durch die Bewegung des Körpers gebracht worden. Soll nun der Punkt o (fig. 2.) mit b (fig. 1.) im absoluten Raum zusammenfallen, so muß, wenn man durch m und o einen größten Kreisbogen m o zieht, $<$ d m o (fig. 2.) $=$ d m b (fig. 1.), und zugleich m o)fig. 2.) $=$ d o (fig. 2.) $=$ m b (fig. 1.) seyn. Zu diesem Letztern wird aber erfordert, daß (fig. 2.) $<$ o d m $=$ d m o $=$ d m b (fig. 1.) $= \varphi$ sey. Nun ist ferner nach (VI) $<$ o d n $= \varphi + \varepsilon$, also

o d m $= 180 - \varphi - \varepsilon$.

Dieses muß also $= \varphi$ seyn. Hierdurch erhält man

I. $\varphi = 180 - \varphi - \varepsilon$

oder II. $2\,\varphi = 180 - \varepsilon$

III. $\varphi = (90 - \frac{1}{2}\,\varepsilon)$.

Für jede Lage, in welche der Körper durch die Bewegung gebracht werden kann, ist der Winkel ε und der Bogen m d bestimmt. Man kann daher durch m n (fig. 1.) allezeit einen größten Kreis m b n so legen, daß $<$ b m d oder $\varphi = 90 - \frac{1}{2}\,\varepsilon$. Dieser größte Kreis wird durch die Bewegung in eine Lage d o a (fig. 2.) gebracht, so daß $<$ o d n $= \varphi + \varepsilon$, also (wenn $\varphi = 90 - \frac{1}{2}\,\varepsilon$), $<$ o d m $= 180 -$ o d n, $= 90 - \frac{1}{2}\,\varepsilon =$ o m d ist. Hierdurch wird (fig. 2.) m o von selbst $=$ d o. — In dem sphärischen Dreieck m o d (fig. 2) ist m d nebst den beiden anliegenden gleichen Winkeln bestimmt. Hieraus ergibt sich m o und d o. Nimmt man also (fig. 1.) $<$ d m b $= 90 - \frac{1}{2}\,\varepsilon$, und von m aus ein Stück m b $=$ dem (berechneten) m o (fig. 2.), so ist b (fig. 1.) ein Punkt des Körpers, der bei der angenommenen Bewegung seinen Ort nicht geändert hat.

Zusatz. 1. Da eine gerade Linie in Ruhe ist, wenn zwei Punkte derselben in Ruhe sind, so werden alle Punkte des Körpers, die in der geraden Linie c b liegen, nach der Bewegung des Körpers (im absoluten Raum) dieselbe Lage, wie vor der Bewegung haben.

§. 15.

Wenn bei einer übrigens willkührlichen Bewegung eines Körpers Ein Punkt desselben in Ruhe bleibt, so kann man ihn in jede Lage, welche er durch diese Bewegung annimmt, dadurch bringen, daß man ihn um irgend eine durch den unbeweglichen Punkt laufende gerade Linie als Achse herumdreht.

Beweis. Bei jeder hier angenommenen Bewegung gibt es, außer dem Punkt, der als unbeweglich vorausgesetzt wird, nothwendig noch einen andern, der seinen Ort nicht ändert. Dasselbe gilt also auch von der geraden Linie, welche diese Punkte verbindet. Da nun ein Körper, wenn eine gerade Linie in demselben befestigt ist, keine andere Lage annehmen kann, als eine solche, worin man ihn durch Umdrehung um diese gerade Linie bringen kann, so ist der Satz erwiesen.

Anmerkung. Man muß den so eben (§. 15.) angeführten Satz nicht so verstehen, als ob ein Körper, worin ein Punkt unbeweglich ist, jede Lage nothwendig dadurch erhalte, daß er sich um eine und dieselbe gerade Linie herumdreht. Man kann vielmehr dem Körper seine Lage dadurch geben, daß man ihn sich nach und nach um mehrere gerade Linien als Achsen herumdrehen läßt. Allein wie viele Achsen der Art es immer geben, und in welche Lage der Körper durch die Umdrehung um dieselben endlich gebracht seyn mag, so kann man in der ursprünglichen Lage des Körpers immer eine Achse so annehmen, daß er durch Umdrehung um dieselbe in die nämliche Lage, wie auch durch die nacheinander folgende Umdrehung um alle andern gebracht wird.

Zusatz. Bei jeder Veränderung, welche die Lage eines Körpers, der einen festen Punkt hat, erleidet, gibt es nur eine einzige Linie in demselben, welche ihre Lage (im absoluten Raum) nicht ändert. Nämlich der Körper läßt sich in jede Lage dadurch bringen, daß man ihn um eine gerade Linie, als Achse, herumdreht. Hierbei verändern aber alle Punkte, die nicht in dieser Linie liegen, ihren Ort.

§. 16.

Wenn alle Punkte eines Körpers sich bewegen, so kann man denselben in jede Lage, welche er dadurch annehmen kann, auch dadurch bringen, daß man einer geraden Linie desselben

eine fortschreitende (progressive) Bewegung *) und dem Körper eine gewisse Umdrehungs-Bewegung um diese gerade Linie als Achse ertheilt.

Beweis. I. Bei irgend einer Bewegung sey ein Punkt c des bewegten Körpers (fig. 3.) nach γ gekommen. In einer, durch cγ gelegten, übrigens willkührlichen, Ebene denke man sich aus c, als Mittelpunkt mit dem nämlichen, übrigens willkührlichen, Halbmesser zwei völlig gleiche und sich deckende Kreise beschrieben, wovon der Eine mit der Masse des Körpers fest verbunden, der andere aber im absoluten Raum ohne allen Zusammenhang mit dem Körper ist.

II. Man denke sich, der letztere habe eine fortschreitende Bewegung, welche mit der Bewegung des Punktes c in Hinsicht der Richtung und Geschwindigkeit völlig übereinstimmt, so daß, wenn m' der Ort im Raume ist, wohin ein Punkt m dieses Kreises in derselben Zeit kommt, in welcher c nach γ kommt, die Linie mm' = und # cγ.

III. Der mit dem Körper festverbundene Kreis kann bei diesem Fortschreiten des andern unendlich viele Lagen gegen die Ebene des letztern (im absoluten Raum beschriebenen) annehmen. Allein da die Mittelpunkte beider Kreise sich auch nach der Bewegung in demselben Punkte des Raumes befinden (indem sie beide von c nach γ kommen), so muß auch nothwendig ein Durchmesser beider Kreise zusammenfallen. mn sey dieser Durchmesser. Derselbe erhalte durch die Bewegung in dem mit dem Körper verbundenen Kreis die Lage ad, und in dem andern Kreis durch die fortschreitende Bewegung des letztern die Lage m'n'. Da nun der Körper, wenn die Lage der Linie ad bestimmt ist, keine andere Bewegung, als eine umdrehende um ad als Achse annehmen kann, so kann man den Körper in jede Lage, in der er durch irgend eine willkührliche Bewegung kommen kann, dadurch bringen, daß man ihm eine progressive Bewegung ertheilt, wodurch c nach γ also mn nach m'n' kommt, dann diese Linie (m'n') in der Ebene des Krei-

*) D. h. eine solche, wobei alle Punkte der geraden Linie nach gleichen Richtungen und mit gleichen Geschwindigkeiten fortgehn.

ses m' d n' um den Winkel $m' \gamma d$, und endlich den ganzen Körper um γd als Achse bis zu einer gewissen Gränze dreht.

IV. Allein (nach §. 14.) kann man dem Körper die Lage, welche er durch die beiden letzten Bewegungen (durch das Fortrücken von m' nach d und durch die fernere Umdrehung des Körpers um γd) erhält, auch dadurch geben, daß man ihn um eine, durch γ laufende Achse dreht. $\gamma \beta$ sey diese Achse, und durch $m' n'$ und $\gamma \beta$ ein Kreis $m' \beta n'$, dessen Halbmesser $= \gamma n'$, gelegt.

V. Die Linie $\gamma \beta$ hat nach der wirklichen Bewegung des Körpers dieselbe Lage, die sie auch haben würde, wenn alle Punkte desselben mit gleichen Geschwindigkeiten und nach parallelen Richtungen fortgeschritten wären. Da nun, wenn die Lage von $\gamma \beta$ bestimmt ist, der Körper keine andere Lage, als eine solche, worin man ihn durch eine umdrehende Bewegung um $\gamma \beta$ als Achse bringen kann, anzunehmen fähig ist, so ist der Satz erwiesen. — Um den Ort des Punktes β im Anfang der Bewegung zu finden, lege man durch $m\,n$ als Durchmesser einen Halbkreis $m\,b\,n$, so daß $< f\,m\,n = d\,m\,\beta$. Nimmt man nun noch $m\,b = m' \beta$, so ist b der gesuchte Ort.

Zusatz. Der Punkt c ist ganz willkührlich im Innern des Körpers angenommen worden. — Nimmt man statt c jeden andern Punkt, wenn er nur nicht in der Linie $c\,b$ liegt, so erhält man für jeden noch eine andere Linie, die bei der Bewegung des Körpers dieselbe progressive Bewegung, wie der gewählte Punkt selbst hat, die also ungeachtet der Bewegung mit sich selbst parallel bleibt. Jede fernere Veränderung der Lage des Körpers kann daher nur durch Umdrehung um diese Linie hervorgebracht werden. Für jede Lage, worin ein Körper durch eine Bewegung, wobei kein Punkt in Ruhe ist, gebracht werden kann, gibt es also in demselben unzählig viele gerade Linien der Art, daß man sich vorstellen kann, jede sey parallel mit sich selbst fortgeschritten, und der Körper habe durch Umdrehung um dieselbe seine Lage erhalten. Für jede andere Linie wird indessen theils die progressive Bewegung, theils der Winkel, um welchen der Körper um die Linie gedreht werden muß, verschieden seyn.

§. 17.

Die Lage eines Punktes im Raum wird bekanntlich durch die Coordinaten desselben in Beziehung auf drei sich rechtwinkelig schneidende Linien, welche die Haupt-Achsen heißen, bestimmt. — ab, ac, ad (fig. 4.) seyen drei solche Haupt-Achsen. ab heiße die Achse X, ac die Achse Y, ad die Achse Z. Alsdann ist die Lage eines Punktes e durch die Entfernung desselben von jeder Ebene, welche zwei der drei Haupt-Achsen bilden, oder durch eq, qs, und as (wo eq ╪ ad, qs ╪ ac, und as auf ab selbst genommen ist), bestimmt. Um die Lage einer durch e laufenden geraden Linie eo zu bestimmen, zieht man durch e mit jeder der drei Achsen eine Parallele (er ╪ ab, eg ╪ ac, en ╪ ad), und bestimmt die Winkel, welche die Linie eo mit jeder dieser Parallelen macht. Legt man durch jeden der Endpunkte e, o der geraden Linie eo mit jeder Ebene der drei Hauptachsen eine parallele Ebene, so entsteht ein senkrechtes Parallelepipedon, wovon eo die Diagonale ist, und dessen durch e laufende Seitenlinien er, eg, en die Projectionen von eo auf eben diese Seitenlinien sind. Dieselben sind auch offenbar den Projectionen der Linie eo auf die drei Hauptachsen gleich. Die Linie er (oder die Projection von eo auf er) ist nämlich dem Stück von ab gleich, welches die von e und o auf ab gefällten Perpendikel zwischen sich fassen. Eben so ist en der Projection von eo auf ad (Z), und eg der Projection auf ac (Y) gleich.

Setzt man eo $=$ d, $<$ oer $= \alpha$, oeg $= \beta$, oen $= \gamma$, so hat man

1) $er = eo \,.\, \cos\alpha = d \,.\, \cos\alpha$

2) $eg = eo \,.\, \cos\beta = d \,.\, \cos\beta$

3) $en = eo \,.\, \cos\gamma = d \,.\, \cos\gamma$.

Ist e ein bewegter Punkt, welcher in einer gewissen Zeit die gerade Linie eo durchlaufen hat, so hat die Projection desselben auf ab in derselben Zeit den Raum er, die auf ac den Raum eg, und die auf ad den Raum en durchlaufen. Die Formeln 1) 2) 3) geben also den von der Projection des Punktes auf jede der drei Achsen durchlaufenen Raum an.

§. 18.

Wenn ein Punkt e (fig. 4.) sich nach einer geraden Linie eo gleichförmig bewegt, so ist die Bewegung der Projectionen desselben auf jede der drei Achsen ebenfalls gleichförmig.

Beweis. Die Geschwindigkeit des Punktes sey $= c$, und $eo = d$ der in einer gewissen Zeit t durchlaufene Raum, so ist

1) $eo = ct$ (§. 3. 4.)

Setzt man diesen Werth von eo in die (vorig. §. 1. 2. 3.) gefundenen Formeln, so hat man (fig. 4.)

2) $er = c \,.\, t \,.\, \cos.\, \alpha.$

3) $eg = c \,.\, t \,.\, \cos.\, \beta.$

4) $en = c \,.\, t \,.\, \cos.\, \gamma.$

Die drei Linien er, eg, en sind also der Zeit (t) proportional.

Zusatz. 1) Vor der Bewegung war die Abscisse (das x) des Punktes $e = as$. Durch die Bewegung, wodurch e nach o kommt, wird diese Abscisse $= ah$. Der Unterschied dieser Abscissen ist $= ah - as = sh = qf = er = c.t.\cos.\,\alpha$. Um so viel ändert sich also die Abscisse des Punktes e durch die Bewegung. Eben so ist leicht einzusehen, daß $rp = eg = c.t.\cos.\,\beta$ die durch die Bewegung hervorgebrachte Veränderung (μf) des y, und $en = c.t.\cos.\,\gamma$ die dadurch hervorgebrachte Veränderung (op) des z des Punktes e ist. Nennt man daher die Coordinaten des Punktes e vor der Bewegung x, y, z, dieselben nach der Bewegung x', y', z', so ist

1) $x' = x + c \,.\, t \,.\, \cos.\, \alpha.$

2) $y' = y + c \,.\, t \,.\, \cos.\, \beta.$

3) $z' = z + c \,.\, t \,.\, \cos.\, \gamma.$

Zusatz. 2. Wenn ein Punkt e sich nach gerader Linie von e nach o bewegt hat, und man kennt die Veränderungen (er, eg, en), welche jede seiner Coordinaten dadurch erlitten hat, so kann man sowohl die Größe als Richtung des zurückgelegten Wegs (eo) finden. Man hat nämlich

1) $(eo)^2 = er^2 + eg^2 + en^2$

also 2) $eo = \sqrt{(er^2 + eg^2 + en^2)}$;

ferner 3) $\frac{er}{eo} = \cos.\ \alpha$, $\frac{eg}{eo} = \cos.\ \beta$, $\frac{en}{eo} = \cos.\ \gamma$.

§. 19.

Aufgabe. Wenn alle Punkte der drei Hauptachsen eine Bewegung nach parallelen Richtungen und von gleichen Geschwindigkeiten erhalten (so, daß die Achsen ab, ac, ad (fig. 5.) in die Lagen a′ b′, a′ c′, a′ d′ kommen), die Coordinaten eines unbeweglich gebliebenen Punktes gegen die Achsen, in ihrer neuen Lage genommen, aus seinen frühern Coordinaten zu finden.

Auflösung. Durch die Bewegung ist der Anfangspunkt der Coordinaten-Achsen von a nach a′ gekommen. Fällt man von a′ ein Perpendikel a′ l auf die Ebene bac, so ist dieses das z des neuen Anfangspunktes (a) in Beziehung auf die alten Achsen. Nun sey e irgend ein anderer Punkt. Von demselben werde ebenfalls ein Perpendikel ef auf die Ebene bac gefällt, welches die Ebene b′a′c′ bei g treffe. Da diese letztere Ebene mit bac parallel ist, so ist eg auch senkrecht darauf. eg ist also das z des Punktes e in Beziehung auf die neue, und ef in Beziehung auf die alten Achsen. Nun ist aber offenbar $eg = ef - gf$. Da die Ebenen bac, b′a′c′ parallel sind, so ist $gf = a'l$; also $eg = ef - a'l$. Setzt man also dieses letztere (a′l) oder das z des neuen Anfangspunktes $= g$, $ef = z$, $eg = z'$, so hat man

1) $z' = z - g$.

In Beziehung auf die beiden andern Achsen (X, Y) muß dasselbe wie auch in Beziehung auf Z gelten. Ist daher für den neuen Anfangspunkt in Beziehung auf X die Coordinate $(a'n) = h$, in Beziehung auf Y die Coordinate $(ls) = l$, so hat man, wenn man für den Punkt e dieselbe Coordinate in Beziehung auf die neuen x′, y′ nennt,

2) $x' = x - h$.

3) $y' = y - l$.

Zusatz. Wenn die Bewegung des Punktes a gleichförmig ist, so kann man, wenn die Geschwindigkeit c desselben,

die Zeit t, welche er sich bewegt, und die Winkel α, β, γ, welche die Richtung a a' seiner Bewegung mit den Achsen X, Y, Z macht, kennt, die Coordinaten a'l, as, ls des neuen Anfangspunktes nach (§. 18. Zus. 1.) finden Es ist nämlich

1) $a'l = g = c \cdot t \cdot \cos. \gamma$.

2) $as = h = c \cdot t \cdot \cos. \alpha$.

3) $ls = l = c \cdot t \cdot \cos. \beta$.

Durch diese Werthe von g, h, l erhält man aus (1. 2. 3. dies. §.) für den Punkt e.

4) $x' = x - c \cdot t \cdot \cos. \alpha$.

5) $y' = y - c \cdot t \cdot \cos. \beta$.

6) $z' = z - c \cdot t \cdot \cos. \gamma$.

Anmerkung. Die Bewegung des Punktes a ist hier so angenommen, daß alle drei Coordinaten des neuen Anfangspunktes positiv werden. Wie man erkennt, ob sie negativ werden, und wie man in diesen Fällen zu verfahren habe, muß man sich entweder aus den Lehrbüchern der analytischen Geometrie, oder aus dem, was im ersten Theil dieses Werks bei der Zerlegung der Kräfte erinnert worden, bekannt machen.

§. 20.

Wenn einem Punkt e nach irgend einer beliebigen Richtung eine gleichförmige Bewegung von einer willkührlichen Geschwindigkeit ertheilt wird, so ändert sich dadurch seine Lage gegen die drei Hauptachsen in einer gewissen Zeit eben so, als sie sich in derselben Zeit ändern würde, wenn der Punkt unbeweglich bliebe, aber allen Punkten der drei Hauptachsen eine der Bewegung des Punktes gleiche und parallele, aber nach gerade entgegengesetzter Richtung, ertheilt würde.

Beweis. Die Coordinaten des Punktes in Beziehung auf die drei Hauptachsen (X, Y, Z) seyen vor der Bewegung p, r, s, nach derselben p', r', s'; die Richtung, nach welcher er sich bewegt, mache mit den Hauptachsen, oder mit Linien, die denselben parallel sind, die Winkel α, β, γ; seine Geschwindigkeit sey c, die Zeit seiner Bewegung t, so ist nach (§. 17. Zus. 1.)

1) $p' = p + c \cdot t \cdot \cos. \alpha$.

2) $r' = r + c . t . \cos. \beta.$

3) $s' = s + c . t . \cos. \gamma.$

Wird allen Punkten der drei Hauptachsen die entgegengesetzte Bewegung des Punktes e ertheilt, so seyen die Winkel, welche die Richtung, nach welcher sich der Anfangspunkt a bewegt, mit den drei Achsen macht, der Ordnung nach α', β', γ'; die Coordinaten des Anfangspunktes nach der Bewegung in Beziehung auf die alten Achsen h, l, g; so hat man

4) $\alpha' = 180 - \alpha$, also $\cos. \alpha' = - \cos. \alpha.$

5) $\beta' = 180 - \beta$, — .. $\cos. \beta' = - \cos. \beta.$

6) $\gamma' = 180 - \gamma$, — .. $\cos. \gamma' = - \cos. \gamma.$

Folglich nach (§. 19. Zus. 1. 2. 3.)

7) $h = c . t . \cos. \alpha' = - c . t . \cos. \alpha.$

8) $l = c . t . \cos. \beta' = - c . t . \cos. \beta.$

9) $g = c . t . \cos. \gamma' = - c . t . \cos. \gamma.$

Nennt man nun die Coordinaten des (als unbeweglich angenommenen) Punktes e in Beziehung auf die Achsen nach der Bewegung dieser letztern $= p''$, r'', s'', so hat man nach (§. 19. (4. 5. 6))

10) $p'' = p - h = p - c . t . \cos. \alpha' = p + c . t . \cos. \alpha.$

11) $r'' = r - l = r - c . t . \cos. \beta' = r + c . t . \cos. \beta.$

12) $s'' = s - g = s - c . t . \cos. \gamma' = s + c . t . \cos. \gamma.$

Die Werthe von p'', r'', s'', sind denen von p', r', s' völlig gleich. Der Punkt e erhält also durch seine Bewegung dieselben Coordinaten, also auch dieselbe Lage in Beziehung auf die drei Hauptachsen, die er auch durch die Bewegung der letztern nach einer seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung erhalten würde.

Zusatz. Wenn einem Punkte nacheinander mehrere Bewegungen, nach willkührlichen Richtungen und von willkührlichen Geschwindigkeiten, ertheilt werden, wodurch er nach und nach verschiedene gerade Linien, jede einzelne für sich mit gleichförmiger Bewegung, durchläuft, so wird er dadurch gegen die Hauptachsen dieselbe Lage erhalten, als ob diesen, derselben Ordnung nach, dieselben Bewegungen, jedoch nach gerade entgegengesetzten Richtungeu, mitgetheilt würden. Nämlich die Aenderungen, welche die Coordinaten des Punktes

durch alle nacheinander folgenden Bewegungen desselben erleiden, ist der (algebraischen) Summe derjenigen Aenderungen, welche sie durch jede einzelne Bewegung desselben erleiden, gleich. Das Nämliche gilt von den Veränderungen, welche die Coordinaten des Punktes durch die Bewegungen der Achsen erleiden. Da nun jede, auf die erste Art hervorgebrachte Veränderung der auf die zweite Art hervorgebrachten, der Ordnung nach, gleich ist, so wird auch die Summe der Veränderungen der ersten Art der der zweiten Art gleich seyn.

Zusatz 2. Da man jede krummlinige Bewegung aus unendlich vielen geradlinigen und jede ungleichförmige aus unendlich vielen gleichförmigen zusammengesetzt denken kann, so gilt das (Zusatz. 1.) Gesagte für jede Bewegung überhaupt.

§. 21.

Wenn zwei Punkte e, e′ (fig. 6.) sich nach willkührlichen Richtungen e l, e′ f, und mit willkührlichen Geschwindigkeiten c, c′ gleichförmig bewegen, und beiden wird noch eine andere Bewegung nach gleichen und parallelen Richtungen e m, e′ m′, und von gleichen Geschwindigkeiten ertheilt; so bleibt für jede Zeit die Lage der Punkte e, e gegeneinander gerade so, als sie auch ohne die neu hinzugekommene Bewegung gewesen wäre.

Beweis. Die Winkel, welche die Richtungen e l, e′ f, e m, e′ m′ mit den Hauptachsen machen, seyen für die erste (e l) der Ordnung nach α, β, γ; für die zweite (e′ f) der Ordnung nach α', β', γ'; für die dritte und vierte (e m, e′ m′) α'', β'', γ''. Die Geschwindigkeiten, mit welchen die Punkte nach diesen Richtungen fortschreiten, seyen der Ordnung nach c, c′, c″. Zerlegt man diese Geschwindigkeiten nach den drei Hauptachsen, so erhält man

für	e l	e′ f	(e m ⋕ e′ m′)
nach X	$c.\cos.\alpha$,	$c'.\cos.\alpha'$,	$c''.\cos.\alpha''$
nach Y	$c.\cos.\beta$,	$c'.\cos.\beta'$,	$c''.\cos.\beta''$
nach Z	$c.\cos.\gamma$,	$c'.\cos.\gamma'$,	$c''.\cos.\gamma''$

Die aus beiden Bewegungen resultirenden Geschwindigkeiten der Punkte sind also

für	nach X	Y	Z
e,	$c.\cos.\alpha + c''\cos.\alpha''$	$c.\cos.\beta + c''\cos.\beta''$	$c.\cos.\gamma + c''\cos.\gamma''$
e'	$c'.\cos\alpha' + c''\cos\alpha''$	$c'.\cos\beta' + c''\cos\beta''$	$c'.\cos\gamma' + c''\cos\gamma''$

Drückt man nun die Coordinaten des Punktes e, so wie sie vor der Bewegung waren, durch l, m, r, eben dieselben nach der Bewegung durch l', m', r' und die Coordinaten des Punktes e' vor der Bewegung durch λ, μ, ς, nach der Bewegung, durch λ', μ', ς' aus, so hat man, wenn t die Zeit der Bewegung bedeutet

1) $l' = l + c.\cos.\alpha\, t + c''\cos.\alpha''\, t$

2) $m' = m + c.\cos.\beta.\, t + c''\cos.\beta''\, t$

3) $r' = r + c.\cos.\gamma.\, t + c''\cos.\gamma''\, t$

4) $\lambda' = \lambda + c'.\cos.\alpha' t + c''\cos.\alpha''.\, t$

5) $\mu' = \mu + c'.\cos.\beta'.\, t + c''\cos.\beta''.\, t$

6) $\varsigma' = \varsigma + c'.\cos.\gamma'.\, t + c''\cos.\gamma''\, t.$

Setzt man die Entfernung der beiden Punkte e, e' nach der Bewegung $= d$, so hat man, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist

7) $d^2 = (l' - \lambda')^2 + (m' - \mu')^2 + (r' - \varsigma')^2$

oder 8) $d^2 = (l - \lambda + (c.\cos.\alpha - c'\cos.\alpha')\, t)^2 + (m - \mu + (c.\cos.\beta - c'\cos.\beta')\, t)^2 + (r - \varsigma + (c.\cos.\gamma - c'\cos.\gamma')\, t)^2.$

In diesem Ausdruck von d^2 kommt c'' gar nicht vor. Daher hat d den nämlichen Werth, als ob $c'' = o$, d. h. als ob die Punkte e, e' gar keine Bewegung nach e m, e' m' erhalten hätten. Setzt man die Winkel, welche die Linie e e' nach der Bewegung mit den drei Hauptachsen, X, Y, Z, oder mit Linien, die denselben parallel sind, macht der Ordnung nach φ, δ, ε, so hat man, wie ebenfalls aus der analytischen Geometrie bekannt ist,

9) $\cos.\varphi = \frac{l' - \lambda'}{d}$, $\cos.\delta = \frac{m - \mu'}{d}$, $\cos.\varepsilon = \frac{r' - \varsigma'}{d}.$

Die Zähler sowohl, als auch die Nenner dieser Brüche sind, wie sich aus dem (1 — 6 u. 8) angegebenen Werthe derselben ergibt, gerade so, wie wenn $c'' = 0$ wäre, oder wenn die Punkte e, e′ nach e m, e′ m′ gar keine Bewegung erhalten hätten. Die Winkel φ, δ, ε, sind also in dem Falle, wo den Punkten e, e′ eine gleiche und parallele Bewegung nach e m, e′ m′ ertheilt worden, gerade so, wie sie auch ohne die Mittheilung dieser Bewegung gewesen wären. Die Linien, welche diese beiden Punkte in dem einen und andern Falle verbinden, sind also untereinander parallel.

§. 22.

Wenn zwei Punkte sich, nach willkührlichen Richtungen und mit willkührlichen Geschwindigkeiten, gleichförmig bewegen, so hat der eine gegen den andern nach jeder Zeit (t) dieselbe Lage, als wenn einer derselben in Ruhe geblieben und dem andern eine der Bewegung des ersten gleiche und parallele, aber der Richtung nach entgegengesetzte, ertheilt worden wäre.

Beweis. Die Geschwindigkeit des ersten Punktes sey c, die des zweiten c′; die Winkel, welche die Richtung des ersten mit den Achsen X, Y, Z macht, seyen der Ordnung nach α, β, γ, dieselben Winkel seyen für die Richtung des zweiten α', β', γ'; die Coordinaten des ersten Punktes seyen im Anfang der Bewegung l, m, r, nach der Zeit t aber l′, m′, r′; die Coordinaten des zweiten Punktes seyen im Anfang der Bewegung λ, μ, ς; nach Verlauf derselben Zeit (t) aber λ' μ' ς'.

Zerlegt man nun die Bewegung eines jeden Punktes nach den drei Hauptachsen, so erhält man

1) $l' = l + c \,.\, \cos.\, \alpha \,.\, t$
2) $m' = m + c \,.\, \cos.\, \beta \,.\, t$
3) $r' = r + c \,.\, \cos.\, \gamma \,.\, t$
4) $\lambda' = \lambda + c' \,.\, \cos.\, \alpha' \,.\, t$
5) $\mu' = \mu + c' \,.\, \cos.\, \beta' \,.\, t$
6) $\varsigma = \varsigma + c' \,.\, \cos.\, \gamma' \,.\, t$

Ist nach der Zeit t der Abstand beider Punkte $= d$, und sind alsdann die Winkel, welche die Linie von dem einen zum an=

dern mit den drei Hauptachsen macht, der Ordnung nach φ, δ, ε, so hat man

7) $d^2 = (l' - \lambda')^2 + (m' - \mu')^2 + (r' - \varsigma')^2$

8) $\cos.\ \varphi = \frac{l' - \lambda'}{d}$, $\cos.\ \delta = \frac{m' - \mu'}{d}$, $\cos.\ \varepsilon = \frac{r' - \varsigma'}{d}$.

Wenn der erste Punkt in Ruhe wäre, dagegen dem zweiten außer der Bewegung, die er schon hat, eine der des ersten gleiche und entgegengesetzte mitgetheilt würde, so wären die Winkel, welche die Richtung der letztern mit den drei Hauptachsen machten, der Ordnung nach $180 - \alpha$, $180 - \beta$, $180 - \gamma$. Nennt man diese Winkel der Ordnung nach α'', β'', γ'', so hat man

9) $\cos.\ \alpha'' = -\cos.\ \alpha$, $\cos.\ \beta'' = -\cos.\ \beta$, $\cos.\ \gamma'' = -\cos.\ \gamma$.

Zerlegt man nun die Bewegung des zweiten Punktes nach den drei Achsen, so sind die Geschwindigkeiten desselben der Ordnung nach $c'.\cos.\ \alpha' - c.\cos.\ \alpha$, $c'.\cos.\ \beta' - c.\cos.\ \beta$, $c'.\cos.\ \gamma' - c.\cos.\ \gamma$. Nennt man die Coordinaten desselben nach der Zeit t der Ordnung nach λ'', μ'', ς'', so hat man

10) $\lambda'' = \lambda + (c'.\cos.\ \alpha' - c.\cos.\ \alpha)\,t$

11) $\mu'' = \mu + (c'.\cos.\ \beta' - c.\cos.\ \beta)\,t$

12) $\varsigma'' = \varsigma + (c'\cos.\ \gamma' - c.\cos.\ \gamma)\,t$.

Hieraus ergibt sich durch gehörige Rechnung $l - \lambda'' = l' - \lambda'$, $m - \mu'' = m' - \mu'$, $r - \varsigma'' = r' - \varsigma'$. Setzt man die Entfernung beider Punkte unter der hier angenommenen Voraussetzung, daß der erste in Ruhe geblieben u. s. f., nach der Zeit $t = d'$, und die Winkel, welche diese Linie mit den drei Hauptachsen macht, φ', δ', ε', so hat man

13) $d'^2 = (l - \lambda'')^2 + (m - \mu'')^2 + (r - \varsigma'')^2$.

14) $\cos.\ \varphi' = \frac{l - \lambda''}{d'}$, $\cos.\ \delta' = \frac{m - \mu''}{d'}$, $\cos.\ \varepsilon' = \frac{r - \varsigma'}{d'}$.

Man hat also $d = d'$, $\varphi = \varphi'$, $\delta = \delta'$, $\varepsilon = \varepsilon'$.

Zusatz. Wenn zwei Punkten nacheinander mehrere Bewegungen mitgetheilt werden, wodurch der erste in mehreren nacheinander folgenden gleichen Zeittheilen der Ordnung nach die Räume s, s′, s″ u. s. f., und der zweite in denselben Zeiten die Räume r, r′, r″ u. s. f., und zwar nach beliebigen Richtungen durchläuft, so haben am Ende aller dieser Bewegungen die Punkte dieselbe Lage gegeneinander, als ob einer der Punkte in Ruhe geblieben wäre, und der andere alle Bewegungen des ersten nacheinander jede nach einer der Richtung des ersten Punktes entgegengesetzten Richtung erhalten hätte. Nimmt nämlich, wenn man sich den ersten Punkt in Bewegung denkt, die Abscisse (x) desselben bei der ersten Bewegung um d, bei der zweiten um d′, der dritten um d″ u. s. f. zu; so ist, wenn man diese Abscisse im Anfang der Bewegung = l und am Ende aller Bewegungen = l′ setzt,

1) $l' = l + d + d' + d'' + \ldots,$

wo von den Werthen d, d′ u. s. f. einige oder auch alle negativ seyn können Nennt man eben so die nacheinander folgenden Zunahmen der Abscisse des zweiten Punktes φ, φ' φ'' u. s. f., die Abscisse desselben im Anfang = λ, am Ende der Bewegung = λ', so ist

2) $\lambda' = \lambda + \varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots,$ also

3) $l' - \lambda' = (l - \lambda) + (d - \varphi) + (d' - \varphi') + (d'' - \varphi'' + \ldots$

Aber gerade so würde auch der Unterschied der Abscissen des ersten und zweiten Punktes nach allen Bewegungen seyn, wenn der erste in Ruhe geblieben, und der andere alle Bewegungen des ersten nach entgegengesetzter Richtung erhalten hätte. Eben so verhält es sich mit dem Unterschied der mit Y und Z parallelen Ordinaten beider Punkte. Von diesem Unterschied der drei Coordinaten beider Punkte hängt aber sowohl die Entfernung derselben, als auch die Lage der geraden Linie, die sie verbindet, ab.

§. 23.

Aufgabe. Die Lage und Entfernung (d) der Mittelpunkte von zwei Kugeln (A, B,) deren Halbmesser f, f′, sind gegeben. Beiden Kugeln werde eine gleichförmige Bewegung

von einer willkührlichen aber bekannten Geschwindigkeit und nach einer willkührlichen aber bekannten Richtung mitgetheilt. Man soll untersuchen, ob die Kugeln sich treffen werden, und wann und wo dieses geschieht.

Auflösung. Die Kugeln können sich nur dann treffen, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte der Summe ihrer Halbmesser gleich ist. Man muß also aus dem Gegebenen diese Entfernung durch die Zeit ausdrücken, und erstere der Summe der Halbmesser gleich setzen; so ergibt sich aus dieser Gleichung die Zeit. Findet sich für diese ein unmöglicher Werth, so treffen die Kugeln sich gar nicht. Findet sich aber ein möglicher und positiver, so kann man daraus die Coordinaten beider Mittelpunkte, also auch den Ort derselben beim Zusammentreffen finden. — Man nehme zur Erleichterung der Rechnung die Linie, welche die Mittelpunkte beider Kugeln verbindet, zur Achse X, und den Mittelpunkt der Kugel A zum Anfangspunkt der Abscissen an. Alsdann ist im Anfang der Bewegung das Y und Z beider Mittelpunkte $= 0$, das X des Mittelpunktes von A ebenfalls $= 0$, und das des Mittelpunktes von B = der Entfernung beider Mittelpunkte, $= d$. Ist nun die Geschwindigkeit von $A = c$, die von $B = c'$, und sind die Winkel, welche die Richtung der ersten mit den Achsen X, Y, Z macht, der Ordnung nach α, β, γ, und dieselben Winkel für die Richtung der zweiten α', β', γ'; sind dabei nach Verlauf der Zeit t die Coordinaten des Mittelpunktes von A in Beziehung auf die Achsen X, Y, Z der Ordnung nach l, m, r, und die des Mittelpunktes von B derselben Ordnung nach l', m', r', die Entfernung beider Mittelpunkte $= V$, so ist

1) $l = c.\cos.\alpha t$, $m = c.\cos.\beta.t$, $r = c.\cos.\gamma.t$

2) $l' = d + c'.\cos.\alpha' t$, $m' = c'.\cos.\beta' t$, $r' = c'.\cos.\gamma' t$

3) $V^2 = (d + (c'\ \cos.\alpha' - c.\cos.\alpha)\,t)^2 + ((c'.\cos.\beta' - c.\cos.\beta)\,t)^2 + ((c'.\cos.\gamma' - c.\cos.\gamma)\,t)^2$.

Man setze um abzukürzen $c'.\cos.\alpha' - c.\cos.\alpha = g$, $c'.\cos.\beta' - c.\cos.\beta = h$, $c'.\cos.\gamma' - c.\cos.\gamma = p$, so hat man, da beim Zusammentreffen der Kugeln $V = f + f'$ ist, für welches letztere wir q setzen wollen;

4) $q^2 = (d + g.t)^2 + h^2.t^2 + p^2.t^2 = d^2 + 2d.g.t + g^2 t^2 + h^2 t^2 + p^2 t^2$,

5) $q^2 - d^2 = (g^2 + h^2 + p^2) t^2 + 2.d.g.t$;

Also endlich durch Auflösung der quadratischen Gleichung

6) $$t = \frac{-dg \pm \sqrt{(d^2 g^2 + (g^2 + h^2 + p^2)^2 (q^2 - d^2))}}{g^2 + h^2 + p^2}$$

Ist nun I.) das unter dem Wurzelzeichen Befindliche positiv, also die Wurzel möglich, und wird aus dem sich dadurch ergebenden Werthe der Werth von t positiv, so treffen sich die Kugeln nach der Zeit t, und hieraus findet man nach 1) und 2) die Coordinaten der Punkte, wo ihre Mittelpunkte sich alsdann befinden. — Sind beide Werthe von t positiv, so darf man nur den kleinsten derselben für die Zeit t, nach welcher die Kugeln sich treffen, nehmen. Gibt es nämlich zwei solche positive Werthe von t, so würde die Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln während ihrer Bewegung zweimal der Summe ihrer Halbmesser gleich werden, wenn die Kugeln nicht aneinander stießen, und durch ihre Undurchdringlichkeit nicht verhindert würden, ihren Weg fortzusetzen. — Ist nun aber II.) das unter dem Wurzelzeichen Befindliche negativ, so treffen die Kugeln sich nie. Ist endlich III.) das unter dem Wurzelzeichen Befindliche zwar positiv, aber beide sich daraus ergebenden Werthe von t sind negativ, so treffen die Kugeln sich ebenfalls gar nicht. Sie würden sich aber treffen, wenn man beiden die Bewegung, die sie haben, nach gerade entgegengesetzter Richtung mittheilte.

Der kleinste unter den negativen Werthen von t *) zeigt alsdann die Zeit an, nach welcher die Kugeln zusammenstoßen.

---

*) D. h. derjenige, der die kleinste Menge Einheiten hat.

Zweiter Abschnitt.

Von den verschiedenen Arten der bewegenden Kräfte, und dem Maß derselben.

§. 24.

Unter den allgemeinen Eigenschaften der Körper und der Materie überhaupt, welche in der Einleitung zum ersten Theil näher erklärt worden sind, ist für die Lehre von der Bewegung diejenige, welche man die Trägheit *) (inertia) nennt, Eine der wichtigsten. Vermöge derselben bleibt ein Körper, der einmal in Ruhe ist, immerfort in Ruhe, und Einer, der einmal in Bewegung ist, fährt ohne Ende fort, sich nach der nämlichen Richtung, und mit der nämlichen Geschwindigkeit zu bewegen, wenn nicht irgend eine Kraft in dem einen oder andern dieser Zustände eine Veränderung hervorbringt. — Unter Kraft versteht man Alles, was eine Bewegung hervorzubringen strebt. So wie nun eine solche Kraft erforderlich ist, um einen ruhenden Körper in Bewegung zu setzen, so ist auch eine erforderlich, um einem in Bewegung befindlichen diese Bewegung wieder zu nehmen. Die Beweise für diese wichtige Eigenschaft der Körper, welche vorzüglich auf dem unläugbaren Satze beruhen, daß es ohne Ursache keine Wirkung gibt, sind schon im ersten Theile näher angeführt. Wir wollen, indem wir uns hier darauf beziehen, in dem zunächst Folgenden nur einige dagegen eingebrachte Einwürfe widerlegen.

§. 25.

Wenn eine Kraft einem Körper eine Bewegung von einer gewissen Geschwindigkeit ertheilt hat, so muß, wenn der Kör-

*) Das Wort ist eben nicht sehr gut gewählt, und kann leicht zu irrigen Vorstellungen Veranlassung geben. Besser vielleicht würde man diese Eigenschaft durch: Beharrungs-Vermögen, oder durch Gleichgültigkeit gegen Ruhe und Bewegung bezeichnen.

per diese Bewegung oder Geschwindigkeit beibehalten soll, die Kraft nicht ferner fortfahren auf ihn einzuwirken. Denn, da der Körper, schon vermöge seiner Trägheit, auch ohne fernere Einwirkung der Kraft die einmal erhaltene Geschwindigkeit unverändert beibehielte, so muß, wenn überdem die Kraft noch fortfährt auf ihn einzuwirken, seine Geschwindigkeit immer zunehmen. — Ein Beispiel einer solchen immer wachsenden Geschwindigkeit haben wir an allen fallenden Körpern, welche um so schneller fallen, je länger sie schon gefallen sind. *) Die Schwere wirkt nämlich immer fort auf die Körper, auch während des Fallens. Die Schnelligkeit der Bewegung muß daher immer zunehmen. — Eine Kraft, welche während der Bewegung eines Körpers fortfährt auf ihn einzuwirken, heißt eine beschleunigende Kraft (vis acceleratrix). Durch eine solche Kraft wird nun zwar nicht immer wirklich eine Beschleunigung hervorgebracht. Es kann sogar dadurch eine Verzögerung entstehen wenn nämlich die Richtung der Kraft derjenigen der Bewegung, die der Körper schon früher hatte, entgegengesetzt ist. Indessen pflegt man doch selbst in diesem Fall die Kraft eine beschleunigende zu nennen, und dieselbe, oder ihre Wirkung, als negativ zu betrachten. — Man theilt die beschleunigenden Kräfte verschiedentlich ein, nämlich a) in beständige (unveränderliche) und veränderliche; b) in absolute und relative. Bleibt eine beschleunigende Kraft immer von gleicher Stärke, so heißt sie eine beständige (unveränderliche), sonst eine veränderliche Kraft. Wichtiger ist die Eintheilung der beschleunigenden Kräfte in absolute und relative. Absolute Kräfte heißen diejenigen, die auf einen bewegten Körper eben stark einwirken, als auf einen ruhenden, so daß der Grad ihrer Wirkung von der Ruhe oder Bewegung, so wie von der größern oder geringern Geschwindigkeit des Körpers, worauf sie wirken, nicht abhängt. Relative Kräfte hingegen nennt man solche, die auf einen bewegten Körper

---

*) Dieses geht schon daraus hervor, daß ein fallender Stein z. B. einen um so größern Stoß hervorbringt, einen Menschen um so ärger verwundet u. s. f., je länger er gefallen ist.

anders einwirken, als auf einen ruhenden, so daß die Stärke dieser Wirkung entweder von der Richtung oder der Geschwindigkeit dieser Bewegung abhängt. Zu den Kräften der ersten Art (den absoluten) gehört insbesondere die Schwere, so wie überhaupt alle Kräfte, die man anziehende (vires attractivae) nennt, z. B. die allgemeine Anziehungskraft der Materie (auch die allgemeine Schwere, gravitas universalis genannt); die electrische, magnetische Anziehungskraft u. s. f. — Unter die Kräfte der zweiten Art (die relativen) gehören vorzüglich alle diejenigen, welche durch einen Stoß wirken, z. B. die Kraft des bewegten Windes oder Wassers, die eines geworfenen Steins u. s. f. Läuft Einer nämlich vor einem geworfenen Steine fort, so verletzt dieser ihn lange nicht so stark, als wenn er stehen bleibt, oder gar demselben entgegenläuft. Läuft Einer mit derselben Geschwindigkeit fort, womit der Stein ihm folgt, so verletzt derselbe ihn gar nicht, wenn schon der Stein dicht an seinem Körper liegt u. s. f.

Anmerk. Diese Eintheilung der Kräfte in absolute und relative ist für die Mechanik von der größten Wichtigkeit, so daß die Anfänger sich mit derselben wohl vertraut machen müssen. Wir wollen dieses, der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen, mit einem Beispiel erläutern. — Wenn eine Maschine zuerst in Bewegung gesetzt, z. B. das Wasser auf die Schaufeln eines Mühlrades gelassen wird, so fängt, wie die tägliche Erfahrung lehrt, das Rad zuerst an sich nur langsam zu bewegen. Die Geschwindigkeit wächst nach und nach, allein diese Zunahme dauert nicht sehr lange, sondern nach einigen Sekunden geht die Bewegung gleichförmig fort. Man sagt alsdann, die Maschine sey in Beharrungsstand. Das Eintreten eines solchen Beharrungsstandes scheint auf den ersten Anblick dem Gesetz der Trägheit zu widersprechen. Der Widerstand, der sich der Bewegung der Maschine entgegensetzt, und eben so auch die Kraft, welche sie in Bewegung setzt, mag nämlich von einer Art oder Stärke seyn, wie man will, so wird man doch den einen, so wie die andere, einem Gewicht von einer gewissen Anzahl Pfund gleich setzen können. Daher muß die bewegende Kraft größer seyn, als der Widerstand, indem sonst die Maschine nicht in Bewegung gerathen kann. Nehmen wir also den Widerstand = 1000 und die Kraft = 1500 Pfund an, so gehen wegen des Widerstandes 1000 Pfund der Kraft verloren. Allein die übrigbleibenden 500 Pfund der Kraft wirken auf die

Maschine, wie auf eine blos träge Masse. — Man könnte also glauben, daß nach dem so eben Erklärten ihre Geschwindigkeit immer zunehmen müsse. Dieses würde auch wirklich der Fall seyn, wenn eine absolute Kraft von 1500 Pfund auf dieselbe wirkte, wenn sie, z. B. so wie eine Uhr *), durch ein Gewicht in Bewegung gesetzt würde. Allein die Kraft des Wasserstoßes ist nur eine relative. Wenn man dieselbe = 1500 Pfund setzt, so versteht sich dieses nur in Beziehung auf eine ruhende Fläche (wie die der Schaufel). Allein dieses ist nur im Anfang der Bewegung der Fall. Sobald die Maschine in Bewegung ist, weicht die Schaufel dem Stoße, und zwar um so mehr aus, je schneller sie sich bewegt. Hieraus ist leicht einzusehen, daß die Schaufel dem Wasserstoße endlich mit einer Geschwindigkeit ausweichen werde, bei welcher die Kraft des Stoßes auf dieselbe nur noch 1000 Pfund (gerade so viel, als der Widerstand) beträgt. Wenn dieses der Fall ist, so muß die Geschwindigkeit ungeändert bleiben, indem die Kraft alsdann geradezu hinreicht, um den Widerstand aufzuheben.

§. 26.

Die Wirkung, welche eine beschleunigende Kraft auf einen Körper hervorbringt, besteht darin, daß sie ihm entweder eine Bewegung von irgend einer Geschwindigkeit ertheilt, oder daß sie seine Geschwindigkeit um eine bestimmte Größe vermehrt, wenn der Körper, ehe die Kraft auf ihn einwirkte, schon in Bewegung war. Die Größe, oder die Veränderung dieser Geschwindigkeit hängt auch bei demselben Körper, oder bei derselben Masse, nicht allein von der Größe der Kraft, sondern auch von der Länge der Zeit ab, welche die Kraft auf den Körper wirkt. Ist die Kraft eine absolute (so daß ihre Wirkung von der Bewegung des Körpers unabhängig ist), und bleibt ihre Größe und Richtung während der Bewegung ungeändert, so muß sie die Geschwindigkeit desselben Körpers in gleichen, nach einander folgenden Zeittheilchen auch um eben so viel vermehren, d. h. sie muß dem Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ertheilen. Die Größen, um welche

*) Daß die Bewegung einer Uhr, ungeachtet der beständigen Einwirkung des Gewichts, gleichförmig bleibt, rührt daher, weil ihre Bewegung durch das Eingreifen des Pendels immerfort wieder gehemmt wird.

die Geschwindigkeit eines Körpers durch die Wirkung einer Kraft in einer bestimmten Zeit verändert wird, heißt die dem Körper von der Kraft in der angenommenen Zeit ertheilte Geschwindigkeit. Ist diese angenommene Zeit gerade eine Sekunde, so heißt diese Geschwindigkeit auch die von der Kraft hervorgebrachte Beschleunigung (die Beschleunigung der Kraft), (§. 5.). Die Zunahme der Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit ist der Summe aller Zunahmen, welche sie vom Anfange bis zum Ende der angenommenen Zeit erhalten hat, gleich. War daher der Körper im Anfange dieser Zeit in Ruhe, so ist dieselbe Summe auch der Geschwindigkeit selbst, womit der Körper sich am Ende der Zeit bewegt, gleich. Die Geschwindigkeiten, womit der Körper sich in diesem Fall am Ende verschiedener Zeiten (vom Anfang der Bewegung an gerechnet) bewegt, müssen sich daher, wie diese Zeiten, selbst verhalten, d. h. die Geschwindigkeit des Körpers wird nach 2, 3, 4..n Sekunden 2, 3, 4... nmal so groß, als nach der ersten Sekunde seyn. Man wird daher 1) die Geschwindigkeit des Körpers nach jeder Zeit leicht berechnen können, wenn man diejenige, welche er nach einer bestimmten Zeit hat, kennt. 2) Die Geschwindigkeit wird mit der Zeit ins Unendliche wachsen, wenn die beschleunigende Kraft auch noch so klein ist, wenn sie nur eine absolute Kraft ist, und ihre Richtung und Größe sich nicht ändert. — Ist die Kraft eine relative, so wird, wenn schon die Größe der Kraft unverändert bleibt, ihre Wirkung immer schwächer, je schneller der Körper sich bewegt. Die Geschwindigkeit nimmt also hier nicht in gleichen Zeiten auch um ebenviel zu, sondern diese Vergrößerung folgt einem besondern Gesetze, welches jedesmal nach der besondern Natur der wirkenden Kraft näher zu bestimmen ist.

Anmerk. 1. Aus dem so eben Gesagten erklären sich leicht einige Versuche, die man, als dem Gesetz der Trägheit widersprechend, ansehen könnte. Man kann z. B. durch eine dünne, halb geöffnete Thüre schießen, ohne daß dieselbe zugeht. Eben so kann man einen, an dem Balken einer Wage in horizontaler Lage befestigten Pfeiffenhalm durch einen starken Schlag zerbrechen, ohne daß die Wage in Bewegung geräth. Man könnte vielleicht hieraus schließen, als ob die Körper, im eigentlichsten Sinne, träg

wären, d. h. eine Abneigung gegen die Bewegung hätten. Allein diese Versuche erklären sich ganz ungezwungen dadurch, daß eine jede Kraft, sey sie auch noch so groß, eine gewisse Zeit auf einen Körper wirken muß, um ihm eine bestimmte Geschwindigkeit zu ertheilen. Ist diese Zeit zu klein, wie dieses in den so eben angeführten Versuchen der Fall ist, so erhält der Körper auch von einer sehr großen Kraft nur eine sehr unmerkliche Bewegung, welche durch die Reibung, den Widerstand der Luft u. s. f. aufgehoben wird.

Anmerk. 2. Als Einwurf gegen das Gesetz der Trägheit pflegt man auch noch folgenden Versuch anzuführen Wenn man einer auf einer horizontalen Ebene ruhenden Kugel eine progressive Bewegung ertheilt, wobei sie sich zugleich um ihre Achse und zwar so dreht, daß die Richtung, welche der unterste Punkt der Kugel durch die Umdrehung erhält, derjenigen der progressiven Bewegung, welche der Mittelpunkt hat, entgegengesetzt ist, (wie wenn man eine Billiardkugel unter ihrem Mittelpunkte anstößt), so pflegt die Kugel, nachdem sie eine Zeitlang nach gerader Linie fortgegangen, von selbst eine Bewegung nach gerade entgegengesetzter Richtung anzunehmen, und zu dem Orte, wovon sie ausgegangen, zurückzukehren. — Die Ursache liegt darin, daß die Reibung an der Fläche, worauf die Kugel sich bewegt, ihre progressive Bewegung eher, als ihre umdrehende hemmt. Aber eine solche Umdrehungsbewegung muß, durch die Reibung, welche die Kugel an der Fläche, worauf sie liegt, erleidet, nothwendig in eine fortschreitende nach der angegebenen Richtung übergehen.

§. 27.

So wie jede Ursache eine Wirkung hervorbringen muß, wenn ihr nicht eine andere Ursache entgegenwirkt, so muß jede mechanische Kraft, die auf einen Körper wirkt, auch demselben eine Bewegung ertheilen, wenn nicht eine andere Kraft ihm eine gleiche Bewegung nach gerade entgegengesetzter Richtung zu ertheilen strebt. Wenn wir uns daher alle Kräfte, die einem Körper eine Bewegung nach irgend einer Richtung ertheilen könnten, von demselben gesondert, oder auch andere Kräfte, welche mit den ersten im Gleichgewicht sind, an demselben angebracht denken; so muß jede Kraft, die ferner auf ihn wirkt, ihm nothwendig eine Bewegung mittheilen. Jede auch noch so große Masse wird daher durch jede noch so kleine Kraft in Bewegung gesetzt werden. — Hiermit

stimmt auch die Erfahrung vollkommen überein, wenn man nur alle Kräfte, welche die Bewegung hemmen können, insbesondere die Reibung, den Widerstand der Luft u. s. f. entfernt. So wird z. B. die ungeheure Masse der Kriegsschiffe schon durch die Kraft des Windes in Bewegung gesetzt, obschon hier nur die Reibung *) entfernt ist, und der Widerstand der Luft nicht allein, sondern der noch stärkere des Wassers der Bewegung entgegen wirkt. Eben so erhält eine gute Wage, wenn sie auf jeder Wagschale mit 1000 Pfund beschwert ist, durch ein sehr kleines Uebergewicht eine Bewegung u. s. f. Obschon indessen eine jede Masse durch jede Kraft in Bewegung gesetzt wird, so ist es doch nicht gleichgültig, wie groß bei einer bestimmten Kraft die Masse, oder bei einer bestimmten Masse die Kraft ist. Dieser Unterschied wird sich nämlich in der verschiedenen Geschwindigkeit zeigen, welche die Masse in derselben Zeit erhält. Die Geschwindigkeit wird nämlich, wenn irgend eine Kraft eine bestimmte Zeit auf eine Masse gewirkt hat, um so größer seyn, je größer bei gleicher Masse die Kraft, oder je kleiner bei gleicher Kraft die Masse ist.

§. 28.

Schon (Theil I. §. 19.) ist erklärt worden, wie man das Verhältniß von zwei Kräften bestimmen könne, nämlich dadurch, daß man ein Gewicht angibt, dessen Druck dem Drucke jeder der beiden Kräfte gleich ist. Das Verhältniß der Kräfte ist alsdann dem Verhältnisse dieser Gewichte gleich. Außer dieser Methode, welche für die Statik die genaueste und richtigste ist, gibt es noch eine andere, die für die Mechanik von der größten Wichtigkeit ist. Da nämlich die Wirkungen sich wie die Ursachen verhalten müssen, und die Wirkung einer auf eine Masse eine Zeit hindurch wirkenden Kraft darin besteht, daß sie derselben eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt, so werden zwei absolute und beständige Kräfte sich verhalten, wie

---

*) Das Gewicht des Schiffes an und für sich ist hier ohne alle Wirkung. Dasselbe ist zwar nicht von der Masse des Schiffs getrennt, aber es wird durch den Gegendruck des Wassers aufgehoben.

die Geschwindigkeiten, die sie derselben Masse in derselben Zeit ertheilen, oder wie die Beschleunigungen (§. 26.), welche sie in derselben Masse hervorbringen. Setzt man die Größe des Drucks, den zwei Kräfte ausüben, in Gewicht ausgedrückt, für die erste = P, für die zweite = Q; die von der ersten in einer gewissen Masse hervorgebrachte Beschleunigung (die ihr in Einer Sekunde ertheilte Geschwindigkeit (§. 26.)) = g, die von der zweiten hervorgebrachte = g′, so ist

1) $P : Q = g : g'$.

Man kann hieraus a), wenn das Verhältniß von zwei beschleunigenden Kräften, und die von Einer derselben hervorgebrachte Beschleunigung gegeben ist, die der andern, und eben so b) wenn das Verhältniß der Beschleunigungen und die Größe Einer Kraft in Gewicht bekannt ist, die Größe des Drucks, den die andere ausübt, (in Gewicht) finden. Wenn z. B. auf unserer Erde ein fallender Körper durch die Schwere in der ersten Sekunde eine Geschwindigkeit von 31 Fuß erhält, und derselbe Körper würde, wenn er sich auf der Oberfläche eines andern Planeten befände, durch den Fall in derselben Zeit eine Geschwindigkeit von 20 Fuß erhalten, so würde sich die Kraft der Schwere auf unserer Erde zu der auf der Oberfläche des andern Planeten, wie 31 : 20 verhalten. Man würde also, um auf der Oberfläche des Planeten eine Masse zu tragen, die hier auf der Erde 31 Pfund wägt, nicht mehr Muskelkraft anzuwenden brauchen, als auf unserer Erde für 20 Pfund erforderlich ist.

Zusatz. Sind die Kräfte, die man vergleichen will, veränderlich, so muß man den Zeitpunkt bestimmen, für welchen man ihr Verhältniß wissen will. Dasselbe ist alsdann dem der Geschwindigkeiten, welche die eine und andere Kraft in derselben Masse in einem unendlich kleinen, aber für beide Kräfte gleichen Zeittheilchen hervorbringt, gleich. — Will man relative Kräfte miteinander vergleichen, so ist zu bemerken, daß für jede relative Kraft der Theil derselben, welcher den Körper in jedem Augenblick wirklich treibt, als eine absolute anzusehen ist. Wenn z. B. der Stoß des Wassers, welcher in Beziehung auf eine ruhende Ebene (die Schaufel eines Mühlrades)

1500 Pfund betragen würde, wegen des Ausweichens der Schaufel nicht so groß ist, so läßt sich doch für jeden Zeitpunkt eine absolute Kraft angeben, welche der Ebene die nämliche Beschleunigung, wie der Wasserstoß in diesem Augenblick, ertheilen würde. Wenn diese absolute Kraft, in Gewicht ausgedrückt, = 1000 Pfund ist, so würde der Stoß des Wassers auf die Ebene in dem gewählten Augenblick eben so groß (= 1000 Pfund) seyn. — Betrachtet man auf diese Weise nicht die Größen von zwei relativen Kräften an und für sich, sondern nur die Größen der in jedem Augenblick wirksamen Theile, so kann man dieselben, wie absolute Kräfte, miteinander vergleichen.

§. 29.

Im Vorigen ist erwiesen worden, daß zwei absolute Kräfte um in zwei gleichen Massen zwei gegebene Beschleunigungen hervorzubringen, sich wie diese Beschleunigungen verhalten müssen. Eben so müssen, wenn zwei ungleichen Massen dieselbe Beschleunigung ertheilt werden soll, die dazu nöthigen Kräfte sich wie die Massen verhalten. — Es seyen nämlich zwei ungleiche Massen M, M′. Man denke sich beide in unendlich viele, untereinander gleiche, Massentheilchen getheilt, und an jedem eine gleiche, nach gleicher Richtung mit den übrigen wirkende Kraft angebracht, so werden offenbar alle Theilchen beider Massen (M, M′), also auch diese Massen selbst eine gleiche Beschleunigung erhalten. Die Summen der Kräfte, welche auf die Theilchen der einen und andern Masse wirken, werden sich aber offenbar, wie die Massen selbst verhalten. Jede dieser Summen ist dabei der Kraft, welche auf die ganze Masse wirkt, gleich. Wir haben zwar diese Summe, als über alle Theilchen der Masse gleichförmig vertheilt, angenommen. Allein dieselbe bringt, im Schwerpunkt der Masse angebracht, dieselbe Wirkung, wie unter der hier angenommenen Voraussetzung, hervor (Thl. I. §. 41. Anmerk.) Setzt man daher die Kraft, welche nöthig ist, um der Masse M eine gewisse Beschleunigung zu ertheilen, = P, und die, welche in der Masse M′ dieselbe Beschleunigung hervorbringt, = Q so ist

1) $P : Q = M : M'$.

§. 30.

Aus dem (§. 28. 29.) Erwiesenen leitet sich nun auch leicht die Methode her, das Verhältniß von zwei Kräften, P, Q zu finden, die erforderlich sind, um in zwei ungleichen Massen M, M′, von übrigens bekannter Größe, ungleiche, aber ebenfalls gegebene, Beschleunigungen g, g′ hervorzubringen. Man denke sich nämlich eine dritte Kraft R von solcher Größe, daß sie der ersten Masse M eine Beschleunigung ertheilt, welche derjenigen, welche die zweite Masse (M′) erhalten soll, oder g′ gleich ist. So hat man

1) $P : R = g : g'$

2) $R : Q = M : M'$

Also 3) $P : Q = M.g : M'g'$.

Zwei absolute Kräfte stehen also im zusammengesetzten Verhältniß der Massen, worauf sie wirken, und der Beschleunigungen, die sie denselben ertheilen. —

§. 31.

Das Produkt aus einer bewegten Masse in die Geschwindigkeit, womit sie sich bewegt, heißt die Größe der Bewegung (quantitas motus, quantité de mouvement). Die Kraft nämlich, welche erfordert wird, um der Masse eine Bewegung von dieser Geschwindigkeit zu ertheilen, verhält sich zu der, wodurch einer andern Masse in derselben Zeit eine andere Geschwindigkeit ertheilt wird, gerade wie dieses Produkt für die erste Masse zu dem für die zweite. Soll einer Masse die Geschwindigkeit, die sie hat, in der nämlichen Zeit genommen werden, in welcher sie dieselbe erhalten hat, so muß eine der Kraft, wovon sie ihre Bewegung erhielt, völlig gleiche nach entgegengesetzter Richtung auf sie wirken. Soll die Kraft der Masse ihre Bewegung in einer andern Zeit, als worin sie dieselbe erhielt, nehmen, so muß die Kraft in demselben Verhältniß größer seyn, als diese Zeit kleiner ist. Hieraus erklärt sich die große Kraft, welche eine sehr schnell bewegte Masse ausübt, wenn sie gegen einen festen Widerstand stößt, (die ungeheure Gewalt der Geschützkugeln). Ein solcher Wi-

derstand muß nämlich in einer unmerkbar kleinen Zeit der Masse ihre Bewegung nehmen. Daher muß die Kraft, welche ein so widerstehender Körper ausübt, ungeheuer groß seyn, wodurch der Zusammenhang seiner Theile leicht zerrissen wird.

Dritter Abschnitt.

Von der Bewegung der frei fallenden Körper, so wie von der gleichförmig beschleunigten Bewegung überhaupt.

§. 32.

Aus dem, im vorigen Abschnitt, Erwiesenen folgt, daß ein schwerer Körper, der, sich selbst überlassen, fällt, immer schneller und schneller fallen muß. Es ist also eine wichtige Aufgabe, zu finden, wie sich die von einem solchen Körper in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Räume gegeneinander verhalten: — Wir werden bei dieser Untersuchung Nichts voraussetzen, als 1) daß die Körper träg sind, und 2) daß die Schwere eine absolute Kraft ist. Wir haben dieses letztere bis jetzt zwar noch nicht völlig erwiesen. Allein es folgt von selbst daraus, daß alle Resultate, welche man unter dieser Voraussetzung findet, mit der Erfahrung völlig übereinstimmen. — Obschon sich die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers immerfort ändert, so kann man doch für ein unendlich kleines Zeittheilchen seine Bewegung als gleichförmig ansehen. Man findet daher den in einem solchen Zeittheilchen durchlaufenen Raum, wenn man die Geschwindigkeit, welche der Körper entweder im Anfang *), oder am Ende eines solchen Zeit-

*) Der wirklich durchlaufene Raum wird allezeit größer seyn, als derjenige, den die Rechnung unter der Voraussetzung gibt, daß die Geschwindigknit das ganze Zeittheilchen hindurch nicht größer, als im Anfange desselben ist. Eben so wird der wirklich durchlaufene Raum immer kleiner seyn, als derjenige, den die Rechnung unter der Voraussetzung gibt, die Geschwindigkeit sey das ganze Zeittheilchen hindurch so groß, als am Ende desselben. Führt man die Rechnung sowohl unter der einen als andern Voraussetzung, so erhält man zwei Gränzen, wozwischen der wirklich durchlaufene

theilchens hat, mit der Größe desselben (des Zeittheilchens) multiplicirt. Nun sey die Geschwindigkeit, welche ein fallender Körper am Ende der ersten Sekunde hat, = g *), so wird, wenn man sich die Sekunde in unendlich viele, (in m) gleiche Theile getheilt denkt, die Geschwindigkeit am Ende

des 1ten	— — —	$= \frac{g}{m}$
2ten	Zeittheilchens —	$= \frac{2g}{m}$
3ten	— — —	$= \frac{3g}{m}$
f ten	— — —	$= \frac{fg}{m}$

seyn. Nämlich da die Schwere eine absolute und sich gleichbleibende Kraft ist, so müssen sich die Geschwindigkeiten, die sie einem Körper ertheilt, wie die Zeiten, worin sie auf ihn gewirkt hat, verhalten. — Hieraus ergeben sich die Räume, welche der Körper in den nacheinander folgenden Zeittheilchen durchläuft, wenn man jede Geschwindigkeit mit $\frac{1}{m}$, als der Dauer des Zeittheilchens, multiplicirt. Also für

	Raum
das 1te Zeittheilchen	$\frac{g}{m^2}$
2te — — — — —	$\frac{2g}{m^2}$
3te — — — — —	$\frac{3g}{m^2}$
— — — — — —	— —
f te — — — — —	$\frac{fg}{m^2}$

Raum fällt, und die einander so nahe gebracht werden können, als man will.

*) Man muß sich hier wohl ins Gedächtniß zurückrufen, was man nach (§. 3.) bei einer ungleichförmigen Bewegung unter Geschwindigkeit versteht. So bedeutet z. B. g nicht den in einer (der ersten) Sekunde durchlaufenen Raum, sondern denjenigen, den der Körper in Einer Sekunde durchlaufen würde, wenn seine

Der im Ganzen oder in allen f Zeittheilchen durchlaufene Raum ist die Summe aller dieser Räume, d. h. er ist $= \frac{g}{m^2} + \frac{2g}{m^2} + \frac{3g}{m^2} + \ldots + \frac{fg}{m^2} = \frac{g}{m^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + f)$. Der zweite Factor dieses Produkts ist die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis f, d. h. er ist $= \frac{(1 + f)\, f}{2}$. Also ist der durchlaufene Raum $= \frac{g}{m^2}\left(\frac{(1+f)\,f}{2}\right)$. — Da m, folglich auch f, eine unendlich große Zahl ist, so kann man $1 + f = f$ setzen. Hierdurch ergibt sich, wenn man den durchlaufenen Raum s nennt,

$$1)\quad s = \frac{g \cdot f^2}{2 \cdot m^2}$$

Ist nun für eine andere Menge von Zeittheilchen, für b derselben (vom Anfang des Falles an gerechnet) der durchlaufene Raum $= s'$, so ist

$$2)\quad s' = \frac{g \cdot b^2}{2 \cdot m^2}$$

Also aus 1) und 2)

$$3)\quad s : s' = \frac{g \cdot f^2}{2\,m^2} : \frac{g\,b^2}{2\,m^2} = f^2 : b^2.$$

Sind f der angenommenen Zeittheilchen = t Sekunden, und b derselben = t' Sekunden, so hat man

$$4)\quad f : b = t : t';\; f^2 : b^2 = t^2 : t'^2,$$

also $5)\quad s : s' = t^2 : t'^2$.

Hieraus ergibt sich das merkwürdige Gesetz: **Die von einem frei fallenden Körper in verschiedenen Zeiten (vom Anfang des Falls an gerechnet) durchlaufenen Räume verhalten sich, wie die Quadrate der Zeiten.** — Ein fallender Körper durchläuft also in 2, 3, 4, ... n Sekunden das 4fache, 9fache, 16fache, ... n^2fache des Raumes, den er in einer Sekunde durchläuft.

Zusatz. In der Formel 1) (von §. 31.) drückt der Bruch $\frac{f}{m}$ auch die Zeit des Falls in Sekunden aus. Derselbe gibt

Bewegung Eine Sekunde lang so fortdauerte, wie sie am Ende der ersten Sekunde ist. —

nämlich an, wie viele solcher Zeittheilchen, deren m auf Eine Sekunde gehen, der Fall dauert. Ist also die Zeit des Falls (in Sekunden ausgedrückt) $= t$, so ist $t = \frac{f}{m}$. Setzt man t statt $\frac{f}{m}$ in die eben bezogene Formel, so hat man

$$1)\ s = \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Hieraus findet man für jede Zeit t die Fallhöhe, wenn man g oder die Geschwindigkeit des fallenden Körpers am Ende der ersten Sekunde kennt. Für Eine Sekunde, wo also $t = 1$, erhält man ferner

$$2)\ s = g\frac{t^2}{2} = \frac{g}{2};$$

d. h. der Raum, den ein fallender Körper in Einer Sekunde durchläuft, ist halb so groß, als seine Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde, oder als derjenige Raum, den er in der zweiten Sekunde durchlaufen würde, wenn seine Bewegung die zweite Sekunde hindurch unverändert bliebe. — Um g zu finden, braucht man daher nur zu suchen, wie tief ein Körper in Einer Sekunde fällt, welches offenbar nur durch die Erfahrung gefunden werden kann. Die unmittelbar angestellten Versuche, wenn man nämlich Körper fallen läßt, sind indessen, wegen der Schnelligkeit des Falls, nicht geeignet, Resultate von hinreichender Genauigkeit zu geben. Durch Versuche, die erst im Folgenden näher erklärt werden können, hat man gefunden, daß in einer geographischen Breite von 45^0 der Werth von $g = 9{,}804812$ Meter $= 30{,}18352$ Pariser Fuß $= 31{,}2407$ preuß. oder rhein. Fuß ist. — Die Größe der Schwere hängt nämlich auch in etwa von der geographischen Breite ab. Sie ist in der Nähe der Pole größer und unter dem Aequator kleiner. Drückt man die Geschwindigkeit, welche die Körper in der mittlern Breite von 45^0 durch die Schwere erhalten, durch g', und dieselbe unter einer andern Breite (φ) durch g'' aus, so ist

$$3)\ g'' = g'\,(1 - 0{,}002837 \cdot \cos.\, 2\,\varphi).$$

Unter den Polen ist $\varphi = 90^0$, $2 . \varphi = 180$,
Also $\cos.\, 2\,\varphi = -1$, folglich $g'' = g'\,(1 + 0{,}002837)$.

Unter dem Aequator ist $\varphi = 0$, also auch $2 . \varphi = 0$; $\cos. 2 \varphi = 1$, also $g'' = g' (1 - 0,002837)$. Der Unterschied beider ist $= 2g' (0,002837) = g' (0,005674)$, welches etwa $\frac{1}{176}$ des mittlern Werths (g') ist.

Anmerk. Die Geschwindigkeit, welche ein fallender Körper in Einer Sekunde erhält, ist eine Größe, welche in der Mechanik sehr häufig gebraucht wird. Da überdem der Werth derselben nach Verschiedenheit der Breite verschieden ist, so drückt man dieselbe (gerade wie in der Geometrie das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang), gewöhnlich durch einen bestimmten Buchstaben: g aus, wo man dann bei der Ausrechnung in Zahlen den für die Breite des Ortes, worauf sich die Rechnung bezieht, gehörigen Werth von g nehmen muß. — Noch ist zu bemerken, daß viele Schriftsteller (in Deutschland fast Alle) unter g nicht die Geschwindigkeit, die ein fallender Körper in Einer Sekunde erhält, sondern den Raum, den er in der ersten Sekunde durchläuft, verstehn. Das letztere g ist alsdann gerade halb so groß, als das erste.

§. 33.

Es kommt nun noch darauf an, die in dem vorhergehenden (§. 32.) hergeleiteten Gesetze des freien Falls an der Erfahrung zu prüfen.

Nämlich die Voraussetzung, wovon wir bei Entwickelung dieser Gesetze ausgegangen sind, (daß die Schwere eine absolute und beständige Kraft sey) kann nur dadurch gänzlich außer Zweifel gesetzt werden, daß Alles aus derselben Hergeleitete mit der Erfahrung übereinstimmt. Um diese Erfahrungen gehörig anzustellen, kommt es vor Allem darauf an, die Schnelligkeit des Falls zu mäßigen, ohne daß dadurch das Gesetz der Beschleunigung geändert wird. Ein schwerer Körper, der auf einer schiefen Ebene liegt, wird (Theil I. §. 73.) nach der Länge dieser schiefen Ebene mit einer Kraft getrieben, die sich zu seinem Gewicht verhält, wie die Höhe der schiefen Ebene zu der Länge derselben. Da diese Kraft von der Schwere des Körpers hervorgebracht wird, so muß sie, wenn die Schwere eine absolute und sich gleichbleibende Kraft ist, auch eine solche seyn, und umgekehrt. Ein Körper, der nach der Länge einer schiefen Ebene herabfällt, muß also

zwar schwächer, aber nach demselben Gesetz beschleunigt werden, wie ein frei fallender. — Man kann zu dem Ende eine ausgehöhlte, und zur Verminderung der Reibung wohl geglättete hölzerne Rinne, unter einem schiefen Winkel, gegen den Horizont neigen, und in derselben eine Kugel herabrollen lassen. Wenn man in dieser Rinne, von demselben Punkt an, mehrere Weiten abmißt, und vermittelst einer Uhr, oder durch die Zahl der Schläge eines Pendels, die Zeiten mißt, worin die Kugel diese Weiten durchläuft, so wird man finden, daß sie in 2, 3 ... n Zeittheilchen das 4fache, 9fache, n^2fache von dem in Einem Zeittheil durchlaufenen Raum abmacht, oder daß sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten verhalten. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß die Schwere eine gleichförmig beschleunigende Kraft ist. Aus diesem Gesetze folgt nämlich, daß, wenn der in Einer Sekunde durchlaufene Raum $\frac{g}{2}$, der in t Sekunden durchlaufene $s = \frac{g.t^2}{2}$ ist. Denkt man sich daher, die Zeit t nehme (um eine sehr kleine) Größe d zu, und der durchlaufene Raum (s) wachse dadurch um b, so hat man

$$1)\ (s + b) = \frac{g}{2}\,(t + d)^2$$

$$2)\ s + b = \frac{g}{2}\,(t^2 + 2td + d^2)$$

Also (da $s = \frac{g}{2}\,t^2$)

$$3)\ b = gtd + \frac{g}{2}\,d^2$$

Da d unendlich klein gegen t, so ist d^2 unendlich klein gegen td, und kann daher gegen td vernachlässigt werden. Hierdurch verwandelt sich 3) in

$$4)\ b = g.t.d.$$

Hier ist b der in der unendlich kleinen Zeit d durchlaufene Raum. Da nun für eine solche Zeit die Bewegung als gleichförmig angesehen werden kann, so ist, wenn man die Geschwindigkeit während dieses unendlich kleinen Zeittheilchens c nennt,

$$5)\ c = \frac{b}{d} = g \,.\, t.$$

Eben so wäre, wenn die Geschwindigkeit für eine andere Zeit t' (vom Anfange des Falls an gerechnet) $= c'$ gesetzt wird,

$$6)\ c' = g \,.\, t'.$$

Also $c : c' = gt : g \,.\, t' = t : t'$.

Die Geschwindigkeiten, womit der Körper fällt, verhalten sich also wie die Zeiten, die er gefallen ist, welches das eigenthümliche Merkmal der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist. Nun kann aber eine sich gleichbleibende Kraft nur dann eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringen, wenn sie zugleich eine absolute ist. Da nun die Schwere ohne Zweifel an Größe sich gleich bleibt, so muß sie auch eine absolute Kraft seyn.

Anmerk. I. Das Gesetz der Beschleunigung der fallenden Körper ist Eines der wichtigsten der gesammten Naturlehre, worauf fast die ganze Mechanik gebaut worden. Man verdankt die Entdeckung desselben dem berühmten Galilei, der sie etwa um das Jahr 1602 machte. Man sehe seine Schrift: Discorsi e dimonstrazione matematiche intorno a due nueve scienze attenenti alla Mecanica e i muovomenti locali. Leid. 1638. 4. Vor Galilei hatte man die unrichtigsten Vorstellungen von dem Gesetze des Falls. Man glaubte, seit Aristoteles her, die Geschwindigkeit der fallenden Körper stehe im geraden Verhältniß ihres Gewichts, so daß ein Körper von 10 Pfund zehnmal so schnell falle, als Einer von Einem Pfund. Was die Beschleunigung desselben Körpers betrifft, so hielten die Meisten dafür, die Geschwindigkeit stehe im geraden Verhältniß des durchlaufenen Raums, obschon sich zeigen läßt, daß hieraus etwas Ungereimtes folgt. *) Selbst, nachdem Galilei seine richtigeren Ansichten bekannt gemacht hatte, gab es noch viele, und zum Theil leidenschaftliche Gegner derselben.

*) Wer mit der Integralrechnung bekannt ist, wird dieses leicht so einsehen. Die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t sey $= c$, der in derselben durchlaufene Raum $= s$, der in Einer Sekunde durchlaufene Raum sey $= a$, die Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde $= g$. Alsdann wäre $a : s = g : c$, also $c = \frac{g}{a} \,.\, s = f \,.\, s$, wenn $\frac{g}{a} = f$. gesetzt wird. Nun ist aber $ds = c \,.\, dt$, oder $ds = f \,.\, s \,.\, dt$, also $\frac{ds}{s} = f \,.\, dt$, und $l \,.\, s + C = f \,.\, t$., da s und t zugleich verschwinden müssen, so hat man $C = X$, also $l \,.\, s + X = f \,.\, t$.

Allein Galilei fand einen ausgezeichneten Vertheidiger an Torricelli (de motu gravium naturaliter descendentium, et projectorum libri duo. Florent. 1641. 4.). Andere, Riccioli Almagestum novum I. II. cap. 21. prop. 4.) und Grimaldi suchten die Wahrheit der Galileischen Gesetze durch Versuche zu erweisen. Sie bedienten sich zum Zeitmaß eines Pendels, dessen Schwingungen nur $\frac{1}{6}$ Sekunde dauerten. Sie ließen von verschiedenen genau abgemessenen Höhen Kugeln von Kreide, welche 8 Unzen wogen, herabfallen, und fanden durch wiederholte Versuche, daß dieselben in der Zeit von 5, 10, 15, 20, 25 Schwingungen Räume von 10, 40, 90, 160, 250 römischen Schuhen, und in Zeiten von 6, 12, 18, 24, 26 Schwingungen Räume von 15, 60, 135, 240, 280 Schuhen durchliefen. Vergleicht man die Versuche derselben Reihe mit einander, so ist ihre Uebereinstimmung mit der Theorie vollkommen. Vergleicht man zwei Versuche aus zwei verschiedenen Reihen, so weichen sie in Etwa von der Theorie ab, doch so, daß dieselbe sich noch hinlänglich darin erkennen läßt. Ueberhaupt verstatten Versuche der Art, wegen der außerordentlichen Schnelligkeit, womit die fallenden Körper sich nach wenigen Sekunden bewegen, wo also der geringste Unterschied in der Zeit einen bedeutenden im Raum hervorbringt, keine große Genauigkeit. Hierzu kommt noch, daß der Widerstand der Luft die Bewegung der Körper vermindert. Auch haben andere Beobachter keine so völlige Uebereinstimmung der Theorie und Erfahrung gefunden. Dechales (mundus mathem. tom. II. Stat. C. II. prop. 1.) maß die Räume während der Schwingungen eines Pendels, das halbe Sekunden schlug, und fand, daß kleine Kieselsteine in Zeiten von 1, 2, 3, 4, 5, 6 Schwingungen Räume von $4\frac{1}{4}$, $16\frac{1}{2}$, 36, 60, 90, 123 Schuhen durchlaufen, statt daß sie, wenn man den ersten Versuch zum Grunde legt, nach den Galileischen Gesetzen $4\frac{1}{4}$, 17, $38\frac{1}{4}$, 65, $106\frac{1}{4}$, 153 durchlaufen sollten. Man sieht, die Versuche weichen um so mehr von den Galileischen Gesetzen ab, je größer die Fallhöhe ist, wie dieses auch, indem dadurch der Widerstand der Luft zunimmt, der Theorie völlig gemäß ist. — Die größere Abweichung der letzteren (von Dechales angestellten) Versuche von den Gesetzen des Galilei erklärt sich übrigens dadurch, daß sie mit leichtern Körpern angestellt worden, wobei der Widerstand der Luft stärker einwirkt. Die völlige Richtigkeit der Galileischen Gesetze ist übrigens dadurch völlig erwiesen, daß alle daraus abgeleiteten Folgerungen, welche sich durch die Erfahrung genau prüfen lassen, auch mit derselben völlig übereinstimmend gefunden worden sind. Z. B. die (unten näher zu erklärenden) Gesetze von der Bewegung der Pendel gründen sich ganz auf diese Theorie des Galilei. Diese

Bewegungen lassen sich zugleich durch die Erfahrung aufs Genaueste prüfen und sie stimmen mit derselben völlig überein. — In neuern Zeiten hat man noch ein anderes Werkzeug, um die Gesetze des Falls durch die Erfahrung zu beweisen, erfunden, welches, nach seinem Erfinder Atwood, die Atwoodsche Fallmaschine heißt, und in den Lehrbüchern der Naturwissenschaft näher beschrieben wird.

§. 34.

Aus dem Gesetze, daß die von den fallenden Körpern durchlaufenen Räume sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten, lassen sich einige für die Mechanik wichtige Gleichungen herleiten. Nennt man bei einem fallenden Körper die Zeit des Falls t, die in derselben erlangte Geschwindigkeit c, den durchlaufenen Raum s, die in Einer Sekunde erlangte Geschwindigkeit g, so hat man (nach §. 31. Zus.)

1) $s = \frac{1}{2} g t^2$.

Hieraus wird

2) $\sqrt{\left(\frac{2s}{g}\right)} = t$.

Die Gleichung 2) gibt die Zeit an, in welcher ein fallender Körper einen gegebenen Raum durchläuft. — Da die Geschwindigkeit der fallenden Körper im geraden Verhältniß der Zeit steht, so hat man

3) $1 : t = g : c$.

Also 4) $c = gt$.

5) $\frac{c}{g} = t$.

Setzt man diesen Werth von t in 1) so kommt

6) $s = \frac{c^2}{2g}$;

Also 7) $\sqrt{(2gs)} = c$.

Die Gleichung 6) gibt die Höhe (s), von welcher ein Körper fallen muß, um eine bestimmte Geschwindigkeit (c) zu erhalten, und die Gleichung 7) die Geschwindigkeit (c) an, welche ein schwerer Körper durch den Fall von einer bestimmten Höhe

erhält. Die Höhe, von welcher ein Körper fallen muß, um dadurch eine bestimmte Geschwindigkeit zu erhalten, heißt die zu dieser Geschwindigkeit gehörige Höhe.

§. 35.

Wenn ein Körper vertikal aufwärts geworfen wird, so vermindert die Schwere, da ihre Richtung der des Körpers gerade entgegengesetzt ist, seine Geschwindigkeit beständig. Da die Schwere eine absolute und unveränderliche Kraft ist, so nimmt sie ihm in gleichen Zeiten gleichviel von seiner Geschwindigkeit, und zwar so viel, als sie ihm beim Fallen in derselben Zeit geben würde. Die Bewegung eines solchen Körpers ist also eine gleichförmig verzögerte (§. 4.). — Um die Gesetze derselben näher kennen zu lernen, denke man sich wieder die Zeiteinheit, die Sekunde, in unendlich viele (in m) Theile getheilt. Setzt man dabei die Geschwindigkeit, womit der Körper anfängt zu steigen, = a, so wird seine Geschwindigkeit in den nacheinander folgenden Zeittheilchen seyn, wie folgt:

Am Ende des 1sten	— — —	$a - \frac{g}{m}$
— — — 2ten	— — —	$a - \frac{2g}{m}$
— — — 3ten	Zeittheilchens	$a - \frac{3g}{m}$
— —	— — —	—
— —	— — —	—
— — — ften	— — —	$a - \frac{fg}{m}$

Multiplicirt man diese Geschwindigkeiten mit der Dauer des unendlich kleinen Zeittheilchens $= \frac{1}{m}$, so erhält man die in den verschiedenen Zeittheilchen durchlaufenen Räume.

Also im 1sten — — — — — $\frac{a}{m}$ — $\frac{g}{m^3}$

2ten — — — — — $\frac{a}{m}$ — $\frac{2g}{m^2}$

3ten Zeittheilchen — — $\frac{a}{m}$ — $\frac{3g}{m^2}$

— — — — — — —

— — — — — — —

f ten — — — — — $\frac{a}{m}$ — $\frac{fg}{m^2}$.

Der in f Zeittheilchen durchlaufene Raum ist der Summe aller dieser Ausdrücke gleich. Die Summe aller positiven Glieder derselben ist $= \frac{f.a}{m}$, und die der negativen Glieder findet man gerade so wie (§. 32.) $= \frac{f^2 g}{2m^2}$. Ist die ganze Zeit der Bewegung in Sekunden ausgedrückt $= t$, so ist $\frac{f}{m} = t$, also $\frac{f.a}{m} = at$, und $\frac{f^2 g}{2m^2} = \frac{1}{2} g t^2$. Folglich ist, wenn man den Raum, welchen der Körper in der Zeit t durchläuft, $= s$ setzt

1) $s = at - \frac{1}{2} g t^2$.

Das erste Glied (at) ist der Raum, den der Körper, nach dem Gesetz der Trägheit, mit seiner anfänglichen Geschwindigkeit (a) in der Zeit (t), und das zweite Glied ($\frac{1}{2} g . t^2$) ist der Raum, den er als frei fallender in derselben Zeit (t) durchlaufen hätte. Der wirklich durchlaufene Raum ist also dem Unterschied zwischen diesen beiden Räumen gleich. — Um die Höhe zu finden, bis zu welcher der Körper steigt, muß man die Zeit suchen, welche er zu steigen fortfährt. Diese, statt t in 1) gesetzt, gibt die gesuchte Höhe. Der Körper wird aber so lange steigen, bis die Geschwindigkeit, womit er steigt, $= 0$, oder bis die Geschwindigkeit, welche die Schwere ihm beim freien Fall ertheilt hätte, seiner anfänglichen Geschwindigkeit (a) gleich ist, d. h. bis

2) $a = g . t$,

oder 3) $\frac{a}{g} = t.$

Hierdurch ergibt sich, wenn man die Höhe, die der Körper erreicht, = h setzt, aus 1)

$$4)\ h = \frac{a^2}{g} - \frac{g \cdot a^2}{2 \cdot g^2},$$

oder 5) $h = \frac{a^2}{2g}.$

Die Zeit, welche der Körper gebraucht, um wieder von dieser Höhe zurückzufallen, findet man nach (§. 34. 2.); oder

$$6)\ t = \sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot a^2}{2 \cdot g^2}\right)} = \frac{a}{g}.$$

Ein Körper braucht also eben so viel Zeit, um zurückzufallen, als um zu Steigen. — Eben so ergibt sich die Geschwindigkeit (c), welche der Körper durch das Zurückfallen von der Höhe h erhält, nach (§, 34. 7.); nämlich

$7)\ c = \sqrt{(2gh)} = \sqrt{\left(\frac{2g \cdot a^2}{2g}\right)} = a.$ — Dieselbe ist also wieder gerade so groß, als im Anfange des Steigens.

§. 36.

Wir haben bis jetzt in diesem Abschnitt angenommen, daß die Schwere diejenige Kraft sey, welche die Körper beschleunige, und unter dieser Voraussetzung die Gesetze dieser Beschleunigung untersucht. Allein es ist leicht einzusehen, daß alles Gesagte seine Gültigkeit behalten werde, wenn nur die Kraft, welche einen Körper beschleunigt, eine absolute und beständige, und dabei die Geschwindigkeit im Anfang Null ist. Zwischen der Bewegung der fallenden Körper und der, welche eine andere Kraft der eben genannten Art hervorbringt, wird kein anderer Unterschied statt finden, als daß die absolute Größe der Beschleunigung, oder daß g für jede Kraft einen besondern Werth hat. Erhalten z. B. auf der Oberfläche des Mondes die fallenden Körper in Einer Sekunde die Geschwindigkeit γ, so ist der in t Sekunden durchlaufene Raum $= \frac{1}{2}\,\gamma \cdot t^2$. Derselbe verhält sich zu dem von den fallenden Körpern auf

unserer Erde durchlaufenen, wie $\frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 : \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \gamma : g$. Die Räume, welche Körper, die von zwei absoluten und sich gleichbleibenden Kräften beschleunigt werden, in gleichen Zeiten durchlaufen, verhalten sich also, wie die Beschleunigungen *) der Kräfte, oder wie die Kräfte selbst. — In allen hier betrachteten Fällen folgt aus der Natur der wirkenden Kräfte, daß die Bewegung nothwendig eine gleichförmig beschleunigte ist. Nimmt man, ohne auf die Kräfte, welche die Bewegung hervorbringen, Rücksicht zu nehmen, die Bewegung als eine gleichförmig beschleunigte, die von Null angefangen hat, an; so sind die in diesem Abschnitt aufgestellten Gesetze streng mathematisch erwiesen, und von aller Beobachtung und Erfahrung unabhängig. Bei einer solchen Bewegung muß die Geschwindigkeit, die in jedem Augenblick statt findet, in geradem Verhältniß der, vom Anfang der Bewegung an, verflossenen Zeit stehn, und hieraus folgt, nach streng mathematischen Grundsätzen, daß die durchlaufenen Räume sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten müssen; welches also das allgemeine Gesetz für jede gleichförmig beschleunigte Bewegung, die im Anfang = 0 ist, darstellt. Hat der Körper in dem Augenblick, wo die Beschleunigung anfängt, schon eine gewisse Geschwindigkeit a, (wenn man z. B. einen schweren Körper vertikal abwärts wirft) so findet man für jede Zeit den durchlaufenen Raum, wenn man zu demjenigen, welchen er vermöge der Beschleunigung allein durchlaufen würde, den, welchen er als träger Körper mit der

*) Die deutschen Schriftsteller verstehen daher, wie schon oben erinnert worden, auch meistens unter Beschleunigung (g) den Raum, den eine von einer absoluten und beständigen Kraft getriebener Körper in Einer Sekunde durchläuft, so, daß g bei ihnen nur die Hälfte des oben angegebenen Werthes hat. Es scheint indessen natürlicher, unter Beschleunigung die Geschwindigkeit zu verstehn, welche die Kraft einem Körper (von bestimmter Masse) in der Zeiteinheit ertheilt. Die Vermehrung der Geschwindigkeit ist nämlich die unmittelbare Wirkung, welche die Kraft hervorbringt, wogegen der Raum, selbst beim Aufhören der Kraft, immer größer würde.

anfänglichen Geschwindigkeit abmachen würde, hinzusetzt. Für einen mit der Geschwindigkeit a vertikal abwärts geworfenen Körper wäre also der in der Zeit t durchlaufene Raum $= at + \frac{1}{2} gt^2$.

Vierter Abschnitt.

Von der Bewegung der nach einer beliebigen Richtung frei geworfenen Körper.

§. 37.

Nachdem wir im vorigen Abschnitt die Bewegung der freifallenden und der vertikal aufwärts geworfenen Körper untersucht, wollen wir jetzt zu der Bewegung derjenigen übergehen, welche unter einer gegen den Horizont schiefen Richtung geworfen werden. Wir wollen dabei zur Erleichterung der Uebersicht annehmen, alle Punkte des geworfenen Körpers haben von irgend einer Kraft dieselbe progressive Bewegung erhalten, so daß wir blos die Bewegung Eines Punktes desselben zu betrachten haben. — Nun sey a (fig. 7.) ein schwerer Punkt, welcher nach der Richtung ac, die gegen den Horizont unter einem Winkel $cad = \alpha$ geneigt ist, eine Wurfbewegung von der Geschwindigkeit c erhalten hat. Alsdann ist fürs Erste offenbar, daß die Bewegung des Punktes in der durch ac gelegten Vertikal-Ebene, d. h. in der Ebene (cab) des Neigungswinkels von ac gegen den Horizont vor sich gehen werde. Um nun den Ort des bewegten Punktes für jeden Zeitpunkt zu bestimmen, nehme man die durch a in der Ebene cab gezogene Horizontallinie ab als Abscissen-, und die Vertikal-Linie ag als Ordinaten-Achse an, und suche für jeden Zeitpunkt die Abscisse und Ordinate des bewegten Punktes. Zu dem Ende zerlege man die Bewegung desselben in zwei, und zwar in eine horizontale ad, und in eine vertikale ag. Nimmt man $ac = c =$ der Geschwindigkeit, womit der Punkt geworfen worden, so hat man

$1)\ ad = ac\,.\,\cos.\,\alpha = c\,.\,\cos.\,\alpha.$

$2)\ ag = ac\,.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha = c\,.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha.$

Befindet sich nun der Punkt nach einer gewissen Zeit t bei r, so ist seine Abscisse a q zugleich der Weg, den er nach horizontaler, und q r derjenige, den er nach vertikaler Richtung, von unten nach oben, abgemacht hat. Die Schwere widersteht der horizontalen Bewegung des Punktes gar nicht. Er geht also nach dieser Richtung, als träger Körper gleichförmig fort. Man hat also, wenn man die Abscisse $aq = x$ setzt, aus 1)

$3)\ x = c\,.\,\cos.\,\alpha\,.\,t.$

Den vertikalen Weg (q r) (nach oben) durchläuft der bewegte Punkt, wie ein schwerer Körper, der mit der 1) angegebenen Geschwindigkeit $c\,.\,\sin.\,\alpha$ zu steigen anfängt. Man hat also (nach §. 35. 1.), wenn die Ordinate $qr = y$ gesetzt wird,

$4)\ y = c\,.\,\sin.\,\alpha\,.\,t - \frac{1}{2}\,g\,.\,t^2.$

Die höchste Höhe (o e), bis zu welcher der Punkt über die Horizontallinie a b steigt, heißt die Wurfhöhe, und das Stück der Horizontallinie durch a, von dem Punkt a, wovon der Punkt ausgeht, bis zu dem (b), wo er wieder zu derselben Horizontallinie zurückkehrt, heißt die Wurfweite. — Um die erstere (die Wurfhöhe) zu finden, suche man, wie lange der Punkt steigt. Diese Zeit, statt t in 4) gesetzt, gibt dann das Verlangte. Der Körper steigt aber, bis seine vertikale Geschwindigkeit ($c\,.\,\sin.\,\alpha$) durch die Wirkung der Schwere Null geworden ist, d. h. bis

$5)\ g\,.\,t = c\,.\,\sin.\,\alpha,$

also $6)\ t = \frac{c\,.\,\sin.\,\alpha}{g}.$

Hierdurch verwandelt sich, wenn man die Wurfhöhe $= h$ setzt, 4) in

$7)\ h = \frac{c^2.\,\sin.\,\alpha^2}{g} - \frac{c^2.\,g\,.\,\sin.\,\alpha^2}{g^2}$, oder $h = \frac{c^2.\,\sin.\,\alpha^2}{2\,g}.$

Der Punkt braucht eben viel Zeit von a bis e (d. h. um die Höhe e o) zu steigen, als auch um wieder von e bis b (oder

um die Höhe eo) zu fallen (§. 35. 6.). Die Zeit (t), die er braucht, um von a bis b zu kommen, oder um die Bahn aeb zu durchlaufen, ist dem gemäß $= \frac{2 . c \sin . \alpha}{g}$. Setzt man dieses statt t in 3), so wird x der Wurfweite gleich. Nennt man dieselbe l, so wird aus 3)

$$8)\ l = \frac{2 . c^2 . \sin . \alpha . \cos . \alpha}{g}, \text{ oder da } 2 . \sin . \alpha . \cos . \alpha = $$
$$= \sin . 2\alpha,$$

$$9)\ l = \frac{c^2 . \sin . 2\alpha}{g}.$$

Der Werth von l hängt nicht allein von der Geschwindigkeit c, womit der Körper geworfen wird, sondern auch von dem Winkel α, unter welchem er geworfen wird, ab. l wird am größten, wenn sin. 2α am größten ist. Da nun ein Sinus nicht größer werden kann, als $= 1$, und da für diesen Fall der Winkel $= 90^0$, so erhält man die größte Wurfweite, wenn $2\alpha = 90^0$, oder wenn $\alpha = 45^0$. Dieselbe (größte Wurfweite) ist also $= \frac{c^2}{g}$.

Zus. 1. Wenn man einmal $\alpha = 45^0 - \beta$, und ein andersmal $\alpha = 45 + \beta$ nimmt, so ist die Wurfweite in beiden Fällen gleich. Nämlich im ersten Fall ist $2\alpha = 90 + 2\beta$, und im zweiten ist $2\alpha = 90 - 2\beta$. Zu diesen Winkeln ($90 + 2\beta$, $90 - 2\beta$) gehören aber gleiche Sinus. Folglich hat Sinus sin. 2α, also auch l (§. 37. 9.) in beiden Fällen denselben Werth.

Zus. 2. Ist die Wurfweite (l), und der Winkel α, unter welchem der bewegte Punkt gegen den Horizont geworfen worden, bekannt, so kann man die Geschwindigkeit (c), womit er geworfen worden, finden, wenn man nämlich voraussetzt, daß der Widerstand der Luft die Bewegung entweder gar nicht, oder nur unmerklich verzögert. Aus (§. 37. 9.) ergibt sich nämlich

$$1)\ \sqrt{\left(\frac{g . l}{\sin . 2\alpha}\right)} = c.$$

Man würde auf diese Weise, wenn man den Widerstand der Luft bei Seite setzte, die Geschwindigkeit, womit die Kugel eines Wurfgeschützes fortgeschleudert wird, leicht finden können.

§. 38.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit (c), womit der Punkt geworfen wird, ist gegeben. Man sucht, unter welchem Winkel (cad $= \alpha$) er geworfen werden muß, damit er durch einen bestimmten Punkt r, dessen Ordinate qr $=$ a, und dessen Absciſſe aq $=$ b gegeben sind, gehe.

Auflös. Nach (vorig. §. 3, 4.) ist

1) $b = c \cdot \cos. \alpha \cdot t,$

2) $a = c \cdot \sin. \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2.$

Aus 1 folgt

3) $$\frac{b}{c \cdot \cos. \alpha} = t.$$

Hierdurch verwandelt sich 2) in

4) $$a = \frac{b \cdot \sin. \alpha}{\cos. \alpha} - \frac{1}{2} \frac{g b^2}{c^2 \cos. \alpha^2}.$$

5) $a \cdot c^2 \cos. \alpha^2 = b \cdot c^2 \sin. \alpha \cdot \cos. \alpha - \frac{1}{2} g b^2.$

Setzt man statt $\sin. \alpha$ seinen Werth, nämlich $\sin. \alpha = \sqrt{(1 - \cos. \alpha^2)}$, so wird aus 5)

6) $a^2 . c^2 . \cos. \alpha^2 = b \cdot c^2 \cos. \alpha \sqrt{(1 - \cos. \alpha^2)} - \frac{1}{2} g b^2.$

7) $a^2 c^2 \cos. \alpha^2 + \frac{1}{2} g b^2 = b \cdot c^2 \cos. \alpha \sqrt{(1 - \cos. \alpha^2)}.$

Erhebt man auf beiden Seiten zum Quadrat, so erhält man

8) $a^4 c^4 \cos. \alpha^4 + a^2 c^2 g b^2 \cos. \alpha^2 + \frac{1}{4} g^2 b^4 = b^2 c^4 \cos. \alpha^2 (1 - \cos. \alpha^2) = b^2 c^4 \cos. \alpha^2 - b^2 c^4 \cos. \alpha.^4$

9) $(a^4 c^4 + b^2 . c^4) \cos. \alpha^4 + b^2 c^2 (a^2 g - c^2) . \cos. \alpha^2 = - \frac{1}{4} g^2 b^4.$

10) $$\cos. \alpha^4 + \frac{b^2 c^2}{a^4 c^4 + b^2 c^4} (a^2 g - c^2) \cos. \alpha^2 = - \frac{g^2 b^4}{4 (a^4 c^4 + b^2 c^4)}.$$

Setzt man $\cos. \alpha^2 = u$, so verwandelt sich 10) in eine Gleichung des zweiten Grades, woraus man $u = \cos. \alpha^2$, also durch die Wurzelausziehung auch $\cos. \alpha$ finden kann. —

§. 39.

(§. 37. 3. 4.) ist gezeigt worden, wie man (fig. 7.) für jede Zeit (t) den Ort (r) des bewegten Punktes durch die Abscisse ($aq = x$) und die Ordinate ($qr = y$) desselben bestimmen kann. Nämlich

1) $x = c . \cos. \alpha . t.$

2) $y = c. \sin. \alpha . t - \frac{1}{2} g t^2.$

Um die Natur der von dem geworfenen Punkte (a) durchlaufenen Bahn areb (fig. 7.) zu erforschen, muß man eine Gleichung zwischen den Abscissen und Ordinaten derselben suchen; also 1) und 2) zu einer Gleichung zwischen x und y verbinden. Aus 1) erhält man $\frac{x}{c . \cos. \alpha} = t.$

Hierdurch ergibt sich aus 2) 3) $y = \frac{x . \sin. \alpha}{\cos. \alpha} - - \frac{g . x^2}{2 . c^2 . \cos. \alpha^2}$, welches eine Gleichung zwischen x und y, also eine für die Bahn areb ist.

Zus. 1. Die Bahn areb (fig. 7.) wird von der durch den höchsten Punkt e derselben gezogenen Vertikallinie eo in zwei gleiche und ähnliche Hälften era, esb getheilt. Zieht man nämlich durch einen willkührlichen Punkt w von eo eine horizontale (ws) und verlängert sie nach beiden Seiten, bis sie die Bahn areb bei p, s schneidet, so ist $wp = ws$. wp ist nämlich derjenige Raum, welchen der bewegte Punkt mit seiner horizontalen Geschwindigkeit $c . \cos. \alpha$ in der Zeit beschreibt, die er braucht, um vertikal aufwärts von w bis e zu steigen, und ws ist der Raum, den er mit derselben Geschwindigkeit ($c . \cos. \alpha$) und ebenfalls nach horizontaler Richtung in der Zeit beschreibt, die er braucht, um vertikal abwärts von e bis w zu fallen. Da nun die erste Zeit der zweiten

gleich, und die Bewegung nach horizontaler Richtung gleichförmig ist, so wp = ws.

Zus. 2. Auch die Geschwindigkeit, womit der Punkt in seiner Bahn fortgeht, ist bei p eben so groß, als bei s. Die vertikale Geschwindigkeit bei p ist nämlich so groß, daß er dadurch, wenn er vertikal aufwärts stiege, eine Höhe = we erreichen würde, und gerade eben so groß ist seine vertikale Geschwindigkeit bei s, indem sie derselben Höhe ew zugehört. Ueberdem ist die horizontale Geschwindigkeit des Punktes bei p eben so groß, als die bei s, indem diese während der ganzen Bewegung ungeändert ($= c \,.\, \cos. \alpha$) bleibt. Daher muß auch die aus diesen beiden Geschwindigkeiten (der vertikalen und horizontalen) zusammengesetzte bei p eben so groß, als bei s seyn. — Um die Größe dieser Geschwindigkeit selbst an jedem Punkt p zu finden, bemerke man, daß die vertikale Geschwindigkeit daselbst zu der Höhe $ew = eo - pf = \frac{c^2 \sin. \alpha^2}{2g} - y$ gehört, also nach (§. 34. 7.) $= \sqrt{(c^2 \sin. \alpha^2 - 2gy)}$ ist. Die horizontale ist dabei $= c \,.\, \cos. \alpha$. Aus diesen beiden Geschwindigkeiten entsteht aber, da die Richtungen der zugehörigen Bewegungen sich rechtwinkelig schneiden, nach dem Parallelogramm der Kräfte, eine mittlere Geschwindigkeit $= \sqrt{(c^2 . \cos. \alpha^2 + c^2 \sin. \alpha^2 - 2g.y)} = \sqrt{(c^2 (\cos. \alpha^2 + \sin. \alpha^2) - 2gy)} = \sqrt{(c^2 - 2gy)}$. Diese Geschwindigkeit ist um so kleiner, je größer y ist. Sie ist also bei e am kleinsten, und bei a und b am größten. Bei e, wo $y = \frac{c^2 . \sin. \alpha^2}{2g}$, ist sie $= \sqrt{(c^2 - c^2 . \sin. \alpha^2)} = \sqrt{(c^2 (1 - \sin. \alpha^2))} = \sqrt{(c^2 \cos. \alpha^2)} = c \,.\, \cos. \alpha$; d. h. sie ist der horizontalen Geschwindigkeit des bewegten Punktes gleich. Bei a und b hingegen, wo $y = o$, ist sie $= \sqrt{c^2} = c$.

Zus. 3. Um den Winkel zu finden, welchen die Richtung des bewegten Punktes an irgend einem Punkte p seiner Bahn mit dem Horizont macht, bedenke man, daß, wenn pr ein unendlich kleines Stück dieser Bahn ist, das Dreieck rpn

als geradlinig, und p r als die Richtung des bewegten Punktes bei p, also r p n als der Winkel, den diese Richtung mit der Horizontallinie p n oder mit dem Horizont macht, angesehen werden kann. Man hat aber

$$1)\ \mathrm{Tg.}\, rpn = \frac{rn}{np}.$$

Setzt man das unendlich kleine Zeittheilchen, in welchem der bewegte Punkt von p nach r gekommen, = f, so hat man, da die Bewegung während eines solchen Zeittheilchens als gleichförmig angesehen werden kann,

$$2)\ pn = c \,.\, \cos.\, \alpha \,.\, f.$$

$$3)\ rn = f \sqrt{(c^2 \sin.\, \alpha^2 - 2g.y)}$$

Also $4)\ \mathrm{Tg.}\, rpn = \dfrac{\sqrt{(c^2 \sin.\, \alpha^2 - 2g.y)}}{c \,.\, \cos.\, \alpha}.$

Der Zähler dieses Bruches wird = o, wenn $c^2 . \sin.\, \alpha^2 = 2g.y$, oder wenn $\dfrac{c^2 \sin.\, \alpha^2}{2g} = y$, d. h. wenn y der größten Höhe o e, die der Punkt erreicht, gleich ist. Bei e ist also Tg. r p n = o, d. h. die Richtung des bewegten Punktes ist bei e horizontal.

§. 40.

Wir wollen die (vorig. §.) für die Bahn der geworfenen Körper gefundene Gleichung 3) nämlich

$$1)\ y = \frac{x \,.\, \sin.\, \alpha}{\cos.\, \alpha} - \frac{g x^2}{2 \,.\, c^2 \cos.\, \alpha^2}$$

so abändern, daß die Abscissen auf der Wurfhöhe e o, und zwar von dem höchsten Punkte e, und die Ordinaten parallel mit dem Horizont genommen werden, daß also e m die Abscisse und m r die Ordinate von r ist. Setzt man nun, wie (§. 37. 7. 8.) die Wurfhöhe $= h = \dfrac{c^2 \sin.\, \alpha^2}{2g}$, die Wurfweite $= l = \dfrac{2 \,.\, c^2 \sin.\, \alpha \,.\, \cos.\, \alpha}{g}$, e m = u, m r = z; so ist

$$2)\ em = eo - mo = eo - rq,$$

oder 3) $u = h - y$;
also 4) $y = h - u$.
5) $mr = qo = ao - aq$,
oder 6) $z = \frac{1}{2} l - x$,
und 7) $x = \frac{1}{2} l - z$;
durch 7) und 4) verwandelt sich 1) in

$$8)\ h - u = \frac{\frac{1}{2} l . \sin. \alpha}{\cos. \alpha} - \frac{z . \sin. \alpha}{\cos. \alpha} - \frac{g . l^2}{8 . c^2 . \cos. \alpha^2} + \frac{g l z}{2 . c^2 \cos. \alpha^2} - \frac{g . z^2}{2 . c^2 \cos. \alpha^2}.$$

Setzt man hierin nach (§. 37. 7. 8.)

$$h = \frac{c^2 . \sin. \alpha^2}{2g},\ \frac{1}{2} . l = \frac{c^2 . \sin. \alpha . \cos. \alpha}{g},$$

so kommt

$$9)\ \frac{c^2 . \sin. \alpha^2}{2g} - u = \frac{c^2 . \sin. \alpha^2}{g} - \frac{z . \sin. \alpha}{\cos. \alpha} - \frac{c^2 . \sin. \alpha^2}{2g} + \frac{z . \sin. \alpha}{\cos. \alpha} - \frac{g . z^2}{2 . c^2 . \cos. \alpha^2}.$$

Nach gehöriger Reduction ergibt sich hieraus

$$10)\ u = \frac{g . z^2}{2 . c^2 \cos. \alpha^2};$$

also 11) $\frac{2 . c^2 . \cos. \alpha^2}{g} . u = z^2$;

welches die Gleichung einer Parabel ist, die e zum Scheitel, e o zur Abscissen-Achse, und $\frac{2 . c^2 . \cos. \alpha^2}{g}$ zum Parameter hat.

Zus. 1. Der Scheitel der Parabel, die ein Punkt eines geworfenen Körpers beschreibt, ist allezeit der höchste Punkt seiner Bahn. Wird er nach horizontaler Richtung, n d (Fig. 8.) geworfen, so ist der Punkt n, von wo er ausgeht, dieser Scheitel. Der Punkt bei n (fig. 8.) hat nämlich gleich im Anfang dieselbe Richtung, die der Punkt a (fig. 7.) hat, wenn er nach e gekommen ist. Der Eine beschreibt also von e aus eine Bahn derselben Art, wie der andere von n aus.

Zus. 2. Wird ein Körper etwa von f aus unter einer

schiefen Richtung fs (fig. 8.), nach unten hin, geworfen, so ist die von jedem seiner Punkte beschriebene Bahn ein Punkt einer Parabel, deren Scheitel bei n so liegt, daß die Tangente nd daselbst horizontal ist. Würde nämlich der Körper von f mit derselben Geschwindigkeit nach einer seiner Richtung gerade entgegengesetzten fl von f aus geworfen, so beschriebe jeder Punkt desselben eine Parabel, deren Parameter und Scheitel aus der Geschwindigkeit bei f und dem Winkel qfs = lfm gefunden werden könnte. Setzt man die erstere = b, und den Winkel lfm = β, so wäre nach (§. 40. 10.) der Parameter der Parabel fnr = $\frac{2 \cdot b^2 \cdot \cos. \beta^2}{g}$, und die Geschwindigkeit bei n nach (§. 39. Zus. 2.) = b . cos. β. Würde der Körper mit dieser letzteren Geschwindigkeit von n aus nach der horizontalen Richtung nd geworfen, so beschriebe er rückwärts von n nach f denselben Weg, den er früher von f nach n beschrieben hat, und er käme bei f wieder mit derselben Geschwindigkeit an, mit welcher er zuerst von f nach n ging. Wenn also ein Körper unter der Richtung fs nach unten geworfen wird, so kann man allezeit einen andern Körper angeben, der von einem andern Ort n, nach horizontaler Richtung geworfen, nach f kommt, und bei f dieselbe Geschwindigkeit und Richtung, als der unmittelbar von f aus geworfene hat. Da nun die Punkte des ersten Körpers von f aus ein Stück fb einer Parabel beschreiben würden, so muß es für die Punkte des letztern ebenfalls wahr seyn.

Anmerk. Die Entdeckung der Gesetze des Falls führte bald auf die der Bahn, welche die geworfenen Körper beschreiben. Auch verdanken wir die Kenntniß des Einen und Andern demselben Manne, dem großen Galilei, der beides in seinem oben angeführten Werke zuerst lehrte. Er selbst hatte indessen schon darauf aufmerksam gemacht, daß die Bahn der geworfenen Körper nur in sofern eine Parabel sey, als der Widerstand der Luft ihre Bewegung nicht hemmt. Bei langsamen Bewegungen kann man dieses ohne merklichen Fehler annehmen, so wie denn auch bei solchen Bewegungen die Theorie durch die Erfahrung bestätigt wird. Bei sehr schnellen Bewegungen weicht indessen die Erfahrung von der Theorie merklich ab. Dieses ist insbesondere bei den Geschützkugeln der Fall, deren

Bahn, wegen ihrer ungeheuren Geschwindigkeit und des dadurch vermehrten Widerstandes der Luft, von einer Parabel merklich verschieden ist. Mehrere der ersten Mathematiker haben sich bemüht, diese Bahn (die ballistische Linie) auch mit Rücksicht auf den Widerstand der Luft zu bestimmen. Allein so schätzbar die von ihnen gefundenen Resultate auch in mancher Hinsicht sind, so ist doch bis jetzt die allgemeine Auflösung der Aufgabe noch Keinem gelungen. Wir wollen daher diejenigen, die sich näher zu unterrichten wünschen, um somehr auf die sogleich folgenden Schriften verweisen, als diese Theorie ohne eine genaue Kenntniß der Differential- und Integral-Rechnung nicht verstanden werden kann.

Neue Grundsätze der Artillerie, enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers, nebst einer Untersuchung über den Unterschied des Widerstandes der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen. Aus dem Englischen des H. Benjamin Robins übersetzt und mit vielen Anmerkungen versehen von Leonhard Euler. Berlin 1745.

Essay d'une théorie d'artillerie par M. le Chevalier d'Arcy. Par. 1760.

Physikalisch-mathematische Grundsätze der Artillerie, in denen die Natur und Eigenschaften des Pulvers untersucht und durch viele und gründliche Erfahrungen ins Licht gesetzt werden. Aus dem Italienischen des H. Papacino d'Antoni, Sr. Königl. Majestät in Sardinien Directeur der theoret. Schulen der Artillerie und Fortifikation, mit Anmerk. vermehrt von G. F. Tempelhof. Berlin 1768.

Tracts on mathematical and philosophical subjects, in three volumes, by Hutton, London 1812.

Prony Lecons de mécanique analytique, Par. 1815. 2 Vol. 4.

Lehrbuch der Artillerie-Wissenschaft. Aus dem Spanischen des D. Thom. de Morla, von J. G. von Hoyer. Leipzig 1824. 2 Bände.

Recherches Balistiques sur les vitesses initiales, le recul, et la résistance de l'air, par M. Prosper. Coste. Par. 1823. 8.

Diese letztere Schrift, worin alle frühern Arbeiten, besonders auch die von Hutton benutzt sind, dürfte als die vollständigste von allen zu nennen seyn. — Eine genügende Uebersicht findet man auch in der neuen Ausgabe von Gehler's physikalischem Wörterbuch, Band I. Artikel: Ballistik.

Bei der Bestimmung der Bahn der Geschützkugeln ist endlich noch zu bedenken, daß dieselben keine bloßen Punkte, sondern Körper sind, die meistens außer ihrer fortschreitenden Bewegung auch eine umdrehende um irgend eine Achse erhalten. Hierdurch können sie wegen der ungleichen Dichtigkeit, welche die Luft unmittelbar vor und hinter der Kugel hat, ebenfalls eine besondere fortschreitende Bewe-

gung erhalten. Dieses wird auch durch die Erfahrung bestätigt, welche lehrt, daß die Kugeln oft merklich von der Vertikal-Ebene, worin die Achse des Geschützes liegt, abweichen. Bei Gewehren verhütet man dieses durch das Ziehen derselben. Die aus einer gezogenen Büchse geschossene Kugel kann nämlich keine andere Umdrehungs-Bewegung, als um eine Achse, die mit ihrer Richtung zusammenfällt, annehmen. Man sehe hierüber bei Gehler den eben angeführten Artikel S. 722.

Fünfter Abschnitt.

Von den Central-Kräften und der allgemeinen Schwere (gravitas universalis).

§. 41.

Wenn ein körperlicher Punkt entweder Ein- für Allemal eine Bewegung nach einer gewissen Richtung erhalten hat, oder wenn auch nur Eine Kraft nach derselben Richtung auf ihn zu wirken fortfährt, so wird die Bahn desselben nothwendig eine gerade Linie seyn. Soll daher ein Punkt sich in einer krummlinigen Bahn bewegen, so müssen mehrere Kräfte auf ihn wirken, wovon wenigstens Eine zu wirken fortfährt. So beschreibt z. B. ein schwerer Punkt oder Körper, dem eine Bewegung nach horizontaler Richtung gegeben worden, (nach vorig. Abschnitt) eine krumme Linie (eine Parabel), indem die horizontale Bewegung ihm nur Ein- für Allemal ertheilt worden, die Schwere aber auf ihn einzuwirken fortfährt. — Man denke sich einem körperlichen Punkt a (fig. 9.) werde Ein- für Allemal eine Bewegnng nach einer gewissen Richtung ab, welche nicht durch einen andern durchaus unbeweglichen Punkt o geht, gegeben, und der erste Punkt a werde von irgend einer Kraft immer nach o getrieben (z. B. von o angezogen), so wird die von dem Punkt a beschriebene Bahn nothwendig krummlinig seyn. Die Bewegung eines Punktes oder Körpers, der beständig nach einem unbeweglichen Punkt

gezogen wird, und der Ein- für Allemal eine Bewegung nach irgend einer Richtung, die nicht durch diesen Punkt geht, erhalten hat, heißt eine Centralbewegung, und die auf den beweglichen Punkt einwirkenden Kräfte heißen Centralkräfte. Die Betrachtung dieser Bewegung und Kräfte macht den Gegenstand dieses Abschnitts aus.

§. 42.

Der feste Punkt, nach welchem bei der Centralbewegung der bewegliche Punkt beständig hingetrieben wird, heißt der Mittelpunkt der Anziehung (centrum attractionis). Eine gerade Linie von diesem nach dem Orte, wo sich der bewegliche Punkt jedesmal befindet, heißt der Leitstrahl (radius rector.). Ist der bewegliche Punkt in einer gewissen Zeit von einem Punkt (a) (fig. 9.) seiner Bahn nach einem andern (s) gekommen, so heißt die Fläche, welche von den zu diesen beiden Oertern (a, s) gehörigen Leitstrahlen (oa, os), und dem zwischen diesen enthaltenen Theil der Bahn (ares) begränzt wird, der von dem Leitstrahl (in der angenommenen Zeit) beschriebene Raum.

§. 43.

Der Punkt a (fig. 9.) habe Ein- für Allemal eine Bewegung erhalten, wodurch er in irgend einer, unendlich kleinen Zeit, die Linie a b beschreiben würde. Wenn er nun zugleich nach dem Punkt o mit einer Kraft gezogen wird, welche ihn in derselben Zeit, wenn er keine andere Bewegung hätte, durch den Raum a c treiben würde, so ist der wirklich von ihm durchlaufene Weg die Diagonale (a r) des Parallelogramms a b r c (wo b r ♯ a c und c r ♯ a b). Hörte bei r die Kraft, die den beweglichen Punkt (a) nach o treibt, auf ferner auf ihn zu wirken, so würde er in dem folgenden, dem früher angenommenen gleichen, Zeittheilchen nach der Richtung ($r\beta$) d. h. nach der verlängerten Diagonale a r einen Weg $r\beta = ra$ beschreiben. Fährt aber diese Kraft (die ihn nach o treibt), auch das folgende Zeittheilchen hindurch fort auf ihn zu wirken, und zwar so, daß sie allein ihn in einer der angenommenen gleichen

Zeit von r nach g triebe, so beschreibt der Punkt wirklich die Diagonale r e des Parallelogramms r g e β, (wo β e $\#$ r g, und g e $\#$ r β). Fährt so die nach o hinziehende Kraft fort, auf den Punkt zu wirken, so wird er fortfahren immer die Diagonallinie eines andern und andern Parallelogramms (z. B. die Diagonale es des Parallelogramms en sm zu beschreiben. Zwei unmittelbar nacheinander folgende Diagonalen dieser Art (wie a r, r e) können zwar nicht in gerader Linie liegen. Allein der Winkel (a r e) den sie untereinander machen, ist nur unendlich wenig von 2 R verschieden, indem die Linie β e (= r g) gegen r β nothwendig unendlich klein ist. Nämlich die dem beweglichen Punkt ertheilte Geschwindigkeit, vermöge welcher er in einer zwar unendlich kleinen Zeit den Weg r β beschreibt, ist eine endliche Größe. Die Geschwindigkeit hingegen, welche ihm die nach o hin wirkende Kraft in der angenommenen, unendlich kleinen Zeit, ertheilt, kann nur unendlich klein seyn, so, daß die größte Geschwindigkeit, die er während seiner Bewegung nach der Richtung r g hat, nur unendlich klein ist. *) Daher ist $\angle$ β r e, um welchen $\angle$ a r e von 2 R abweicht, auch nur unendlich klein. Da nun a r, r e selbst auch unendlich klein sind, so kann man sie als Bogen einer krummen Linie ansehen, und dasselbe gilt von allen in den folgenden Zeittheilchen durchlaufenen Theilen der Bahn. Die von dem beweglichen Punkt unter den hier angenommenen Umständen durchlaufene Bahn ist daher eine krumme Linie, und zwar wird dieselbe ganz in einer Ebene, nämlich in derjenigen liegen, welche durch die dem beweglichen Punkt ursprünglich gegebene Richtung und durch den Punkt o, nach welchem er beständig gezogen wird, geht. — Man ziehe die Hülfslinien o β, o m u. s. f. Alsdann haben die Dreiecke

---

*) r β ist ein in einer unendlich kleinen Zeit, aber mit einer endlichen Geschwindigkeit beschriebener Weg. Dagegen wird r g in einer gleichen (unendlich kleinen Zeit) aber mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit beschrieben. r β ist daher zwar unendlich klein, aber es ist unendlich groß gegen r g. Dieses letztere ist ein unendlich Kleines von einem höhern Grade, als r β. Siehe mein Lehrbuch der Geometrie. Anhang III.

a o r, r o β den Punkt o zur gemeinschaftlichen Spitze, und gleiche Grundlinien, nämlich a r $=$ r β. Daher ist in Beziehung auf die Fläche Δ a o r $=$ Δ r o β. Eben so haben die Dreiecke r o β, r o e die Linie r o zur gemeinschaftlichen Grundlinie, und ihre Spitzen β, e liegen beide in β e $\#$ r o. Daher ist in Beziehung auf die Fläche auch Δ r o $\beta = \Delta$ r o e; daher auch Δ a o r $=$ r o e. Die jetzt genannten Dreiecke sind die von dem Leitstrahl o a in zwei gleichen, nacheinander folgenden Zeittheilchen durchlaufenen Räume (§. 42.). Diese sind also gleich, und da sich dasselbe auf alle folgenden Zeittheilchen ebenfalls anwenden läßt, so folgt daraus der wichtige Satz: Wenn ein körperlicher Punkt Ein- für Allemal eine Bewegung nach irgend einer Richtung erhalten hat, und er wird während derselben immer nach irgend einem festen Punkt, der nicht in der Richtung der ihm ertheilten Bewegung liegt, entweder von einer beständigen oder nach was immer für einem Gesetz veränderlichen Kraft, gezogen, so beschreibt der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume (radius vector temporibus aequalibus verrit areas aequales), woraus denn folgt, daß die von dem Leitstrahl in endlichen Zeiten durchlaufenen Räume sich wie die Zeiten verhalten.

Anmerk. Der so eben angeführte Satz (über die von dem Leitstrahl durchlaufenen Räume) bleibt wahr, die Kraft, womit der Punkt nach o getrieben wird, mag eine absolute oder relative, beständige oder veränderliche seyn. Der Beweis desselben setzt nämlich nicht im mindesten die Gleichheit oder auch irgend ein bestimmtes Verhältniß der Linien a c, r g, e n u. s. f. voraus; ja Eine dieser Linien könnte unendlich groß gegen die übrigen seyn, ohne daß dadurch der Beweis aufhörte, gültig zu seyn. Eben so könnte auch, ohne dieser Gültigkeit des Beweises zu schaden, die Kraft, welche den Punkt nach o zieht, gänzlich aufhören (wo sie Null würde), oder selbst in eine abstoßende, die den beweglichen Punkt von o wegtriebe, übergehen. Nur darf auf den beweglichen Punkt während der Bewegung keine andere Kraft, als eine solche, deren Richtung durch o geht, die ihn also entweder nach o hinzieht, oder davon wegtreibt, wirken.

§. 44.

Nach (vorig. §) wird ein körperlicher Punkt, der Ein für allemal eine Bewegung erhalten hat, und dabei beständig nach einem Punkt, der nicht in der Richtung der mitgetheilten Bewegung liegt, getrieben wird, nothwendig eine krumme Linie beschreiben, wie auch immer die Kraft, die ihn treibt, beschaffen seyn mag. Soll aber die, bei einer bestimmten dem Punkt mitgetheilten Bewegung, durchlaufene Bahn eine krumme Linie einer bestimmten Art, — (ein Kreis, eine Ellipse, u. s. f.) und von einer vorgeschriebenen Größe seyn, so bestimmt sich dadurch auch die Größe der Kraft, welche den beweglichen Punkt nach dem Mittelpunkt der Anziehung hintreiben muß, und zwar wird diese Größe auch bei derselben zu durchlaufenden Bahn theils nach Verschiedenheit des Orts, wo der bewegte Punkt sich in dieser Bahn befindet, theils nach Verschiedenheit der Stelle, welche der Mittelpunkt der Anziehung in dieser Bahn einnimmt, theils auch nach Verschiedenheit der Größe und Richtung der dem körperlichen Punkt mitgetheilten Bewegung verschieden seyn müssen. — Diejenige absolute Kraft, womit der bewegliche Punkt an jeder Stelle seiner Bahn nach dem Mittelpunkt der Anziehung getrieben wird, heißt die Centripetalkraft. Wir wollen, indem wir zur Untersuchung der Größe derselben übergehen, mit dem einfachsten Fall den Anfang machen. — a (fig. 10.) sey irgend ein körperlicher Punkt, o der Mittelpunkt der Anziehung für denselben, also oa der Leitstrahl. Wenn nun demselben eine Bewegung nach einer auf den Leitstrahl (oa) senkrechten Richtung ae ertheilt worden; so fragt sich, wie stark die Größe der absoluten Kraft, die ihn nach oa treibt, seyn müsse, wenn er nicht nach ae fortgehn, sondern einen Kreis beschreiben soll, wovon o der Mittelpunkt, und der Leitstrahl oa der Halbmesser ist —

Auflös. Man denke sich ae sey derjenige Raum, den der Punkt a durch die ihm mitgetheilte Bewegung in irgend einer unendlich kleinen Zeit beschreiben würde. Denkt man sich nun aus o (fig. 10) mit oa einen Kreis beschrieben, und oe gezogen, so muß die Centripetalkraft in dem angenommenen (unendlich

kleinen) Zeittheilchen so auf den Punkt wirken, daß er nicht die Tangente a e, sondern den Kreisbogen a c beschreibt. Sie muß also so stark seyn, daß sie ihn in dem angenommenen Zeittheilchen von e nach c führt. Da dieses Zeittheilchen, folglich auch a e, unendlich klein ist, so ist 1) die Größe der Centripetalkraft, so wie auch die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes während desselben als beständig, und 2) die Linie e c als parallel mit a b, also auch e c = a b anzusehen. Die Linie e c ist daher gleich der Summe aller Räume, durch welche die Centripetalkraft den beweglichen Punkt in der angenommenen unendlich kleinen Zeit getrieben hat. Da nun auch a e unendlich klein ist, so ist es mit dem Bogen a c, und eben so mit b c als gleich anzusehen. Nun sey das unendlich kleine Zeittheilchen = t, die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes = f, die Masse desselben = M, der Halbmesser a o des Kreisbogens a c = r, so ist a e = f . t.; also auch Bog. a c = b c = f . t. Aus der Geometrie ist bekannt, daß

1) $ab : bc = bc : bg$

oder 2) $ab : bc = bc : ag - ab$,

oder 3) $ab : f.t = f.t : 2r - ab$

also 4) $ab = \frac{f^2 . t^2}{2r - ab}$.

Da a b unendlich klein gegen 2 r ist, so kann man in 4) den Nenner = 2 r setzen. Hierdurch wird

5) $ab = \frac{f^2 . t^2}{2r} = ec$.

Dieses (e c) ist also der Raum, durch welchen die Centripetalkraft die Masse M in der Zeit t treibt. Wirkte auf alle Theile derselben Masse eine Kraft, welche unserer Schwere gleich wäre, oder das Gewicht derselben, so würde diese die Masse M in der Zeit t durch einen Raum = $\frac{1}{2} g t^2$ treiben (§. 34. 1.). Die Centripetalkraft, in Gewicht ausgedrückt, wird sich daher zum Gewicht des körperlichen Punktes verhalten, wie

$c : \frac{1}{2} g t^2$, oder wie $\frac{f^2 . t^2}{2r} : \frac{1}{2} g . t^2$.

Setzt man daher die Centripetalkraft = V, das Gewicht des körperlichen Punktes = P, so hat man

$$6)\ V : P = \frac{f^2 . t^2}{2r} : \tfrac{1}{2} g . t^2;$$

Also $$7)\ V = \frac{P . f^2}{g . r}.$$

Dieses ist also die Größe der Kraft, die den körperlichen Punkt bei der hier angenommenen Voraussetzung nach dem Mittelpunkt o treiben muß, damit er in dem angenommenen unendlich kleinen Zeittheilchen (t) den Kreisbogen a c beschreibt. Hat er denselben beschrieben, so würde er, wenn bei c keine Kraft ferner auf ihn wirkte, nach der Richtung der Tangente bei c fortgehn. Soll er von c aus fortfahren, einen Bogen desselben Kreises zu beschreiben, so bedenke man, daß bei c der Halbmesser o c sein Leitstrahl ist. Daher wird die Größe der Centripetalkraft, die in dem folgenden Zeittheilchen auf ihn wirken muß, ebenfalls nach dem so eben Erklärten gefunden. — Die in allen folgenden Zeittheilchen nöthige Centripetalkraft muß daher unverändert bleiben, wenn die Geschwindigkeit sich gleich bleibt. Daß dieses wirklich der Fall sey, wird in dem folgenden (§.) näher bewiesen werden. Hier wollen wir nur noch einige Bemerkungen über den (7) gefundenen Ausdruck von V beifügen.

I.) Die Größe von V (in 7) ist in Gewicht, und zwar in demselben Maße wie P, d. h., sie ist als ein Theil oder Vielfaches von P ausgedrückt. Sie steht im geraden Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit und des Gewichts (P) des beweglichen Punktes, und im umgekehrten Verhältniß des Halbmessers (r) des beschriebenen Kreises, so wie der Geschwindigkeit (g), welche die Schwere einem fallenden Körper in Einer Sekunde ertheilt. — Wir wollen jeden dieser Punkte besonders betrachten.

II.) P bedeutet hier nicht eigentlich das Gewicht des körperlichen Punktes, sondern vielmehr die Kraft, womit derselbe getrieben würde, wenn auf alle Theile seiner Masse (M) eine unserer Schwere gleiche Kraft wirkte, und zwar diese Kraft, in Gewicht ausgedrückt. Ist indessen der körperliche Punkt auf unserer Erde befindlich, und dem Gesetze der Schwere unter-

worfen, so wird die so eben angegebene Kraft gerade seinem Gewichte gleich seyn. Uebrigens gilt der (7) für V gefundene Ausdruck, wenn der körperliche Punkt gar nicht schwer, etwa ein im Universum schwebendes und sich bewegendes Massentheilchen ist *), wo denn P immer im geraden Verhältniß von M steht. Je größer nämlich die Menge der körperlichen Theile, oder je größer die Masse ist, die nach dem Mittelpunkt hin getrieben werden soll, desto größer muß auch die treibende Kraft selbst, oder die Centripetalkraft seyn.

III.) Die Centripetalkraft nimmt mit der Geschwindigkeit des bewegten Punktes (und zwar im geraden Verhältniß des Quadrats derselben) zu. Je schneller nämlich seine Bewegung ist, eine desto größere Kraft wird dazu erfordert, um ihn von der Richtung dieser Bewegung (der Tangente) abzulenken.

IV.) Eben so muß die Centripetalkraft mit der Größe des Halbmessers des zu beschreibenden Kreises abnehmen, indem (wie aus der Geomet. bekannt) ein großer Kreis minder gekrümmt ist, als ein kleiner; also auch bei gleicher Länge des durchlaufenen Bogens der bewegliche Punkt in einem großen Kreis weniger von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird, als in einem kleinen.

V.) Die Größe von V steht im umgekehrten Verhältniß von g, oder der Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern auf unserer Erde in Einer Sekunde ertheilt. Um dieses richtig zu verstehen, bemerke man, daß die Größe der Centripetalkraft an und für sich von der größern oder geringern Wirkung unserer Schwere, also auch von g, durchaus unabhängig ist. Allein der Ausdruck von V stellt die Centripetalkraft als einen Theil, oder als ein Vielfaches eines Gewichts dar. Die Centripetalkraft muß also ein um so geringerer Theil, oder ein um so kleineres Vielfaches desselben Gewichtes seyn, je stär-

---

*) Man wird sich nämlich immer vorstellen können, daß auf jeden Theil der Masse eine unserer Schwere gleiche Kraft wirke, und immer wird sich ein Gewicht angeben lassen, welches der Summe dieser Kräfte gleich ist.

ker dieses Gewicht selbst nach unten drückt, oder von der Erde angezogen wird.

Man stelle sich vor, die Centripetalkraft sey in einem gewissen Fall dem Gewicht eines Körpers A, der auf der Wage 100 Pfund wägt, gleich. Wirkte nun plötzlich die Schwere noch einmal so stark auf die Körper ein, so würde das Gewicht A noch einmal so stark nach unten drücken als vorhin; (so daß z. B. Jemand, der vorher im Stande war, den ganzen Körper zu tragen, nun nicht mehr als die Hälfte davon tragen könnte). Die Centripetalkraft, welche durch diese Zunahme der Schwere gar keine Veränderung erlitte, würde also nun auch nur der Hälfte des Gewichts von A gleich seyn. Die Menge Pfund, die A auf einer Wage wägt, würde durch diese Vermehrung der Schwere nicht geändert werden. Nämlich der Druck des Gegengewichts, womit es abgewogen würde, wäre durch die Zunahme der Schwere ebenfalls verdoppelt worden, so daß A immer noch 100 Pfund wöge. Die Centripetalkraft, welche ungeändert geblieben, wäre also nun nur = 50 Pfund.

§. 45.

Schon im (vorigen §.) ist bemerkt worden, daß, wenn der körperliche Punkt a (fig 10) durch die Wirkung der Centripetalkraft den unendlich kleinen Kreisbogen a c beschrieben hat, der Leitstrahl o c noch immer auf der Richtung der Bewegung senkrecht sey, und daß daher die Größe der Centripetalkraft, die noch ferner auf ihn wirken muß, damit er, in dem folgenden unendlich kleinen, und dem ersten gleichen Zeittheilchen einen, dem Bogen a c gleichen, beschreibt, einzig von der Geschwindigkeit, womit der bewegte Punkt bei c ankommt, abhange. Nun würde derselbe aber mit der Geschwindigkeit (f), die ihm ursprünglich ertheilt worden, in der Zeit t das Stück a e der Tangente bei o durchlaufen haben. Durch die hinzugekommene Einwirkung der Centripetalkraft hat er aber den Bogen a c durchlaufen. Die dazu erforderliche Geschwindigkeit ist $= \frac{\text{Bog. } a\,c}{t}$, so wie die dem Punkt ursprünglich ertheilte Geschwindig-

keit $f = \frac{ae}{t}$. Setzt man den Unterschied dieser beiden Geschwindigkeiten $= h$, so ist

$$1)\ h = \frac{ae - \text{Bog. } ac}{t}.$$

Nun ist $ae > \text{Bog. } ac$, dagegen $bc < \text{Bog. } ac$, Daher

$$2)\ h < \frac{ae - bc}{t}.$$

Zieht man $mc \mathbin{\#} ao$, so ist $ae - bc = me$. Nimmt man ferner $mc = ab$ zum Halbmesser, so ist $me = mc \,.\, Tg$ $mce = me \,.\, Tg\, \alpha = ab \,.\, Tg\, \alpha$. Nun ist aber $ab = \frac{bc^2}{bg}$, oder (da $bc = ft$,*) und $bg = 2r$), $ab = \frac{f^2 t^2}{2r}$, also $me = \frac{f^2 t^2}{2r} \,.\, Tg\, \alpha$. Also aus 2) 3) $h < \frac{f^2 t^2}{t \,.\, 2r} \,.\, Tg\, \alpha$,

$$\text{oder } h < \frac{f^2 \,.\, t}{2r} \,.\, Tg\, \alpha$$

$$\text{daher } 4)\ \frac{h}{f} < \frac{f}{2r} \,.\, t \,.\, Tg\, \alpha.$$

Hier ist sowohl t als auch $Tg\, \alpha$ eine unendlich kleine Größe. Das Produkt $(t \,.\, Tg\, \alpha)$ derselben ist also ein unendlich kleines

---

*) Die Anfänger könnten glauben, dadurch, daß hier in dem Ausdruck von $ab \left(= \frac{bc^2}{bg}\right)$ die Linie $bc = f \,.\, t$ gesetzt worden, sey schon stillschweigend bc als $= ae$ vorausgesetzt, indem ebenfalls $ae = f \,.\, t$. Allein man muß bemerken, daß der Ausdruck $me = ab \,.\, Tg \,.\, \alpha$ völlig richtig ist. Setzt man in demselben statt ab einen Werth, der nur um einen unendlich kleinen Theil von ab von diesem letzteren abweicht, so wird das Resultat nur um einen unendlich kleinen Theil von me von dem wahren Werth abweichen; d. h. der Fehler ist nicht allein unendlich klein gegen ae, sondern gegen me, so daß er gegen ae ein unendlich kleines der zweiten Ordnung ist. — Wer näherer Belehrung bedarf, sehe mein Lehrb. d. Geomet. Anhang III.

der zweiten Ordnung. Der Verlust h, den die Geschwindigkeit f erleidet, ist also gegen diese Geschwindigkeit (f) selbst ein unendlich kleines der zweiten Ordnung; d. h. dieser Verlust unendlichmal genommen bleibt noch immer unendlich klein gegen f. — Hieraus folgt, daß der bewegliche Punkt, während er durch die Wirkung der Centripetalkraft unendlichmal den Bogen ac, oder den ganzen Kreis, wozu ac gehört, beschreibt, dieselbe Geschwindigkeit behält, also auch immer dieselbe Centripetalkraft auf ihn wirken muß, damit er ferner im Kreis fortgehe. — Um dieses noch näher einzusehen, so nehmen wir an, es wirke während der Bewegung immer eine solche Centripetalkraft auf den Körper, wodurch er fortfährt sich in demselben Kreis zu bewegen, ohne dabei vorauszusetzen, daß diese Centripetalkraft, oder die Geschwindigkeit sich immer gleich bleibt. Nehmen wir ferner an, der bewegliche Punkt brauche um den Halbkreis aqg zu beschreiben n solcher Zeittheilchen, wovon wir im vorigen Eines = t gesetzt haben. Der erste in dem ersten Zeittheilchen durchlaufene Raum sey ac, der in dem zweiten, dritten u. s. f. durchlaufene sey cd, dq u. s. f., wo wir wieder nicht voraussetzen, daß ac = cd = dq u. s. f. — Setzt man nun noch die Geschwindigkeiten, welche der bewegliche Punkt in den nacheinanderfolgenden Zeittheilchen hat, der Ordnung nach, f, f′, f″, u. s. f., und dasjenige, was er an seiner Geschwindigkeit in eben diesen Zeittheilchen verliert, h, h′, h″ u. s. f., so hat man nach 3)

$$h < \frac{f^2 . t}{2r} . \mathrm{Tg}\, \alpha$$

$$h' < \frac{f'^2 . t}{2r} \mathrm{Tg}\, \beta$$

$$h'' < \frac{f''^2 . t . \mathrm{Tg}\, \gamma .}{2r}$$

Der ganze Verlust, den die Geschwindigkeit während der Bewegung durch aqg erleidet, ist gleich der Summe h + h′ + + h″...., Setzt man denselben = N, so ist

$$5)\ N < \frac{f^2 . t}{2r} \mathrm{Tg}\, \alpha + \frac{f'^2 . t}{2r} \mathrm{Tg}\, \beta + \ldots\ldots$$

Die Geschwindigkeiten (f', f'' u. s. f.) und eben darum auch die Winkel (β, γ u. s. f.) werden in den folgenden Zeittheilchen immer kleiner. Daher ist unter den 5) rechter Hand des Zeichens $<$ befindlichen Gliedern das erste auch das größte. Daher sicher

$$6)\ N < \frac{n \,.\, f^2 \,.\, t}{2r} \,.\, Tg\, \alpha$$

Hier (in 6) ist n . t nothwendig eine endliche Größe, indem es der Zeit gleich ist, in welcher der Halbkreis aqg durchlaufen wird. Hingegen ist Tg . α, also auch $\frac{n \,.\, f^2 \,.\, t\, Tg\, \alpha}{2r}$ eine unendlich kleine Größe. Daher ist der Verlust N, den die Geschwindigkeit während der Bewegung durch den zum Halbmesser ao gehörigen Kreis erleidet, gegen die anfängliche Geschwindigkeit f unendlich klein oder Null. Diese Geschwindigkeit, und also auch die Größe der erforderlichen Centripetalkraft bleibt also während der Bewegung in einem Kreis ungeändert. — Aus dem bisher Erwiesenen folgt: Wenn ein körperlicher Punkt, dessen Masse M, nach irgend einem unveränderlichen Punkt gezogen wird, und es wird ihm eine Bewegung von irgend einer Geschwindigkeit nach einer auf dem ersten Leitstrahl senkrechten Richtung mitgetheilt, so wird er, wenn eine beständige und absolute Kraft von der oben näher bestimmten Größe auf ihn wirkt, einen Kreis, der den Mittelpunkt der Anziehung zum Mittelpunkt, und den ersten Leitstrahl zum Halbmesser hat, beschreiben. Eben so wird umgekehrt, wenn der Mittelpunkt der Anziehung auch zugleich der Mittelpunkt des Kreises seyn soll, und die erste Richtung der Bewegung auf dem Leitstrahl senkrecht ist, der bewegliche Punkt den eben genannten Kreis nur dann beschreiben, wenn eine beständige und absolute Kraft von der eben genannten Größe ihn nach dem Mittelpunkt treibt.

§. 46.

Die Kraft, welche einen körperlichen Punkt, der sich in einem Kreis bewegt, nach dem Mittelpunkt treibt, kann von sehr verschiedener Art seyn, und nach mannigfaltigen Gesetzen wirken. Ist z. B. der körperliche Punkt durch irgend eine feste Stange mit dem Mittelpunkt verbunden, so vertritt die Festigkeit dieser Stange die Stelle der Centripetalkraft. Die Stange wird in diesem Fall ihrer Länge nach mit einer Kraft gespannt werden, welche der zugehörigen Centripetalkraft gleich ist. Der körperliche Punkt kann nämlich, wenn er nach dem Mittelpunkt gezogen wird, nur dann einen Kreis beschreiben, wenn eine Centripetalkraft von der oben angegebenen Stärke auf ihn wirkt. Nun zieht ihn aber die Festigkeit der Stange gerade nach dem Mittelpunkt, also muß sie ihn auch mit einer Kraft von der angegebenen Stärke ziehn. — Da ein körperlicher Punkt, wenn er sich im Kreis herumbewegen oder während der Bewegung von dem Mittelpunkt desselben gleichweit entfernt bleiben soll, von einer beständigen Kraft nach diesem Mittelpunkt getrieben werden muß, so muß er von selbst eine Kraft ausüben, sich von dem Mittelpunkt zu entfernen. Diese Kraft heißt auch seine Centrifugalkraft (vis centrifuga), seine Fliehkraft, oder Schwungkraft. Dieselbe ist nothwendig der Centripetalkraft gleich, und zwar ist dieses nicht allein bei der Bewegung im Kreis der Fall, sondern, welche krumme Linie auch immer ein körperlicher Punkt beschreiben mag, wenn er nur, nach einer Ein für Allemal erhaltenen Bewegung beständig nach demselben Punkt hingetrieben wird, so wird immer und an allen Punkten der durchlaufenen Bahn die Centripetalkraft der Centrifugalkraft gleich seyn. Denn mit derselben Kraft, womit der bewegliche Punkt, um den Weg zu beschreiben, den er wirklich beschreibt, an jeder Stelle seiner Bahn nach dem Mittelpunkte der Anziehung getrieben werden muß, wird er nothwendig eine feste Stange, die ihn mit dem Mittelpunkt der Anziehung verbindet, nach ihrer Länge dehnen oder spannen, wenn jene Kraft, die ihn nach dem Mittelpunkt treibt, nicht vorhanden ist.

Anmerk. 1. Ich glaube, daß bei der Art, wie ich die Wirkung

der Centralkräfte dargestellt, alle Schwierigkeiten wegfallen, welche die Anfänger (ja sogar hin und wieder die Meister) dabei finden, indem sie nicht begreifen können, wie man demselben Punkt zugleich eine Centripetal- und Centrifugalkraft *) beilegen könne.

*) Gehler, Physikal. Wörterbuch (1798) Theil I. Artik. Centralkräfte, hält sich lange bei der Erläuterung dieser Schwierigkeiten auf. Er selbst gesteht so ziemlich offenherzig, daß dieselben ihm nicht völlig gelöst zu seyn scheinen. In der neuen (nach Gehlers Tode von Brandes, Gmelin u. s. f. besorgten, noch nicht vollendeten) Ausgabe des Gehlerschen Werks geschieht bei demselben Artik. so wie auch bei den Artik. Centralbewegung und Centripetalkraft, von diesen Schwierigkeiten fast gar keine Erwähnung. Es wäre indessen, wie mir scheint, da sie dem nachdenkenden Anfänger sicher aufstoßen, besser gewesen sie zu heben, als sie zu übergehen. — Eines Umstandes, der in beiden Ausgaben des eben genannten Werks (in der ältern Ausgabe Thl. I. Artikel Centralkräfte. Seite 491, in der neuern Thl. II. Artikel Centripetalkräfte. Seite 84) unrichtig dargestellt ist, wo wenigstens die dort gewählte Darstellungsart, sehr leicht zu unrichtigen Vorstellungen verleiten kann, will ich hier erwähnen. Wenn nämlich der bewegte Punkt eine andere krumme Linie als eine Kreislinie beschreibt, so kann man sich bekanntlich diese Linie, von welcher Beschaffenheit sie immer seyn mag, als aus unendlich vielen Kreisbogen, wovon jeder mit einem andern Halbmesser und aus einem andern Mittelpunkt beschrieben ist, zusammengesetzt denken. Der zu irgend einem Punkt der krummen Linie gehörige Kreishalbmesser heißt der Halbmesser der Krümmung. Gehler und seine neuen Herausgeber glauben nun, daß man in jeder krummen Linie die Centrifugalkraft gerade wie in einem Kreis (nach §. 45. 8.) finden könne, wenn man nur statt des dortigen r den zu jeder Stelle der krummen Linie gehörigen Krümmungshalbmesser in Rechnung bringt. Allein es ist wohl zu bemerken, daß der Ausdruck (§. 45. 8.) die Größe der nöthigen Centripetalkraft, also auch der dieser gleichen Centrifugalkraft nur dann angibt, wenn der Mittelpunkt des beschriebenen Kreises auch zugleich der Mittelpunkt der Anziehung ist. Beschreibt daher der bewegte Punkt eine andre krumme Linie als einen Kreis, so müßte der Mittelpunkt der Anziehung beständig seine Stelle wechseln, oder sich immer in dem Mittelpunkt des zu der Stelle, zu welcher der bewegliche Punkt gelangt ist, gehörigen Krümmungskreises befinden, wenn der Ausdruck (§. 45. 8.) die Größe der Centripetal- oder Centrifugalkraft vorstellen sollte. Allein gewöhnlich versteht man unter Centripetalkraft diejenige, von welcher der bewegliche

Es verhält sich indessen hiermit gerade so, wie mit einem schweren Körper, einer Kugel z. B., die auf einer horizontalen Unterlage ruht. Der unterste Punkt der Kugel wird von dem Gewicht derselben nach unten getrieben. Allein die Festigkeit der Unterlage hebt in ihm dieses Bestreben, sich nach unten zu bewegen, auf, indem sie ihn nach oben hin drückt. Derselbe Punkt wird also von dem Gewicht nach unten, und durch den Widerstand der Unterlage nach oben gedrückt, und es würde eines solchen Widerstands oder Drucks nach oben durchaus nicht bedürfen, wenn der Punkt nicht durch irgend eine Kraft (das Gewicht der Kugel) nach unten gedrückt würde. Eben so würde es bei der Bewegung in einer krummen Linie keiner Centripetalkraft bedürfen, wenn der bewegte körperliche Punkt keine Centrifugalkraft hätte. — Man muß übrigens die Centrifugalkraft, oder Schwungkraft, nicht, wie hin und wieder irriger Weise geschieht, mit derjenigen Kraft verwechseln, mit welcher der bewegte Punkt überhaupt nach der Richtung der Tangente fortzugehen strebt. Diese Kraft, wenn sie nach einer der Richtung des bewegten Punktes entgegengesetzten auf ihn wirkte, würde seine Bewegung nach der Tangente, also überhaupt seine Umdrehung um den Mittelpunkt der Anziehung, gänzlich aufheben. Die Sache verhält sich vielmehr so. Der bewegte Punkt hat in jedem Punkte seiner Bahn ein Bestreben, nach der Richtung der Tangente fortzugehen. Er kann aber nicht nach dieser Tangente fortgehen, ohne sich zugleich von dem Mittelpunkt des Kreises a q g h (fig. 10.) zu entfernen (indem offenbar $oe > oa$). Soll also der Punkt dieselbe Entfernung vom Mittelpunkt behalten, d. h. soll er nicht nach der Richtung der Tangente a e, sondern in einem Kreisbogen a c fortgehn, so muß eine Kraft auf ihn wirken, die ihn von der Richtung der Tangente, nach welcher er fortzugehen strebt, beständig ablenkt *), so daß sie ihn beständig nach dem Mittelpunkt des Kreises hintreibt. Die dazu erforderliche Kraft, unter der Voraussetzung, daß ihre Richtung immer durch den Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises geht, ist es, welche wir im vorigen unter dem Wort: Centripetalkraft verstanden haben. Ganz so verhält es sich, wenn der bewegte Punkt irgend eine andere krumme Linie beschreibt. Nur muß man nicht vergessen, daß wir hier annehmen, der bewegte Punkt beschreibe darum eine

---

Punkt nach einem Mittelpunkt der Anziehung, dessen Lage durchaus unveränderlich ist, gezogen werden muß. Alsdann ist der Ausdruck (§. 45. 8.) durchaus unpassend, sondern die Centripetalkraft muß in diesen Fällen so bestimmt werden, wie (in dem folgenden §) näher gezeigt werden wird.

*) Also nicht seine Bewegung nach der Tangente gänzlich aufhebt.

krumme Linie, weil er beständig nach einem unveränderlichen Punkt (dem Mittelpunkt der Anziehung) getrieben wird, und sonst keine Kraft nach irgend einer andern Richtung auf ihn wirkt.*) Die Kraft nun, die nach dieser Richtung in jedem Punkt seiner Bahn auf ihn wirken muß, damit er die Bahn beschreibt, die er wirklich beschreibt, heißt die Centripetalkraft. Es thut hierbei Nichts zur Sache, daß unter gewissen Umständen der bewegte Punkt sich auch ohne die Wirkung einer Centripetalkraft, wenn er nach der Tangente fortginge, doch dem Mittelpunkt der Anziehung näherte, so wie dieses z. B. der Fall seyn würde, wenn der bewegte Punkt in der Ellipse baml (fig. 11.) bei a nach der Tangente ae fortginge, und der Mittelpunkt der Anziehung sich in einem der Brennpunkte o der Ellipse befände. Obschon sich nämlich der bewegte Punkt durch die eben gedachte Bewegung nach ae dem Punkt o näherte, so nähert er sich doch demselben noch mehr, wenn er nicht nach ae fortgeht, sondern den elliptischen Bogen ac beschreibt. Es wird also immer eine Kraft erforderlich seyn, um ihn von der Richtung der Tangente abzulenken, und ihn dem Punkt o um ec zu nähern. — Noch eine besondere Schwierigkeit finden einige bei diesem Gegenstande darin (siehe Gehler Phys. Wörterbuch 1798. Art. Centralkräfte S. 492), daß hier die Trägheit als eine eigentliche Kraft betrachtet werde. Da nämlich der Körper nur vermöge seiner Trägheit nach der Tangente fortzugehen strebt, so, glauben sie, müsse die Kraft, die nöthig ist, um ihn von dieser Richtung abzulenken, nur zur Ueberwindung der Trägheit verwendet werden. Allein die Trägheit ist nicht die Ursache der Bewegung des Körpers. Die wahre Ursache davon ist diejenige Kraft,

---

*) Sollte noch eine Kraft nach einer andern Richtung auf ihn wirken, so müßte man dieselbe in zwei andere, in eine nach der Richtung der Centripetalkraft und in eine nach der Richtung der Tangente zerlegen. Die erste machte einen Theil der Centripetalkraft aus, die andere vermehrte die Geschwindigkeit des bewegten Punktes. Die Zunahme dieser Geschwindigkeit würde allerdings auch von dem Winkel, den die Tangente mit der Richtung der Centripetalkraft macht, abhangen. Allein allezeit bleibt es unrichtig, eine solche Kraft (nach Gehler) in eine nach der Tangente, und in eine andere nach dem Krümmungshalbmesser zu zerlegen, und diese letztere als einen Theil der Centripetalkraft anzusehen. Man erhält auf diese Weise nämlich nur die Kraft, welche den Körper nach dem Mittelpunkt des Krümmungskreises, der für jeden Punkt der Bahn ein anderer ist, und nicht die Kraft, welche ihn nach dem unveränderlichen Mittelpunkt der Anziehung treibt, welche letztere doch von Allen einzig Centripetalkraft genannt wird.

welche ursprünglich auf den Körper eingewirkt und ihm seine Bewegung ertheilt hat. Daß er, nachdem die Kraft auf ihn eingewirkt hat, in dem Zustand der Bewegung, worin sie ihn versetzt hat, bleibe, dazu ist keine Kraft nöthig, wohl aber wird eine Kraft nöthig seyn, um ihn aus diesem Zustand herauszubringen. Wäre dem nicht so, so wäre die Wirkung der ersten Kraft verloren gegangen oder vermindert worden. Um einem ruhenden Körper eine bestimmte Bewegung mitzutheilen, wird allerdings eine gewisse Kraft erfordert, und derjenige, welcher mit einer gewissen Kraft auf einen ruhenden Körper stößt, und ihm dadurch eine Bewegung ertheilt, wird eben dadurch einen Theil seiner Kraft verlieren. Aber darum hat nicht die Trägheit des gestoßenen Körpers die Kraft des stoßenden zernichtet, sondern die Kraft, die der stoßende verlor, ist dem gestoßenen mitgetheilt worden. — Uebrigens ist es allerdings schwer, die Kraft, welche nöthig ist, um die Bewegung eines Körpers zu hemmen, in Gewicht auszudrücken (den Stoß mit dem Druck zu vergleichen). Die Bestimmung der Schwungkraft liefert Eins von den wenigen Beispielen, wo dieses gelungen ist.

Anmerk. 2. Die tägliche Erfahrung bietet sehr viele Beispiele von der Wirkung der Schwungkraft dar. Wenn man einen Stein vermittelst einer Schleuder in einem vertikalen Kreis herumschwingt, so fällt derselbe, bei gehöriger Geschwindigkeit, nicht heraus, sondern er spannt von selbst die Schnur der Schleuder an, so daß dieselbe zerreißt, wenn sie nicht hinreichend stark ist. Eben so läuft das Wasser aus einem Glas, welches man in das Innere eines Reifens setzt, nicht heraus, wenn man den Reifen an dem entgegengesetzten Ende anfaßt und mit hinreichender Geschwindigkeit umschwingt. — Eine Menge Versuche der Art lassen sich mit einem Werkzeuge anstellen, welches die Schwungmaschine heißt, und in den Lehrbüchern der Physik näher beschrieben wird.

Anmerk. 3. Die Schwungkraft hat ebenfalls Einfluß auf die Gestalt unserer Erde. Nämlich bei der täglichen Umdrehung derselben bewegen sich nicht alle Punkte auf ihrer Oberfläche mit gleicher Geschwindigkeit, sondern diese ist für jeden Punkt um so kleiner, je näher er dem Pol ist. Dasselbe gilt von der Schwungkraft, die jeder Punkt durch diese Umdrehung erhält. Die Schwungkraft ist also unter dem Aequator am größten. Auch ist da ihre Richtung der Richtung der Schwere gerade entgegengesetzt. Diese letztere wird also dadurch vermindert, d. h. die Körper werden von der Erde unter dem Aequator nicht so stark angezogen, als es ohne die Wirkung der Schwungkraft der Fall seyn würde. In den andern Gegenden der Erde findet das Nämliche statt, allein in einem geringeren Grade, indem theils die Schwungkraft

an und für sich dort kleiner, theils auch ihre Richtung der Richtung der Schwere nicht gerade entgegengesetzt ist. Das Wasser des Meeres hat also in den verschiedenen Gegenden eine verschiedene, und zwar um so geringere Schwere, je weiter die Gegend vom Aequator entfernt ist. Da nun nichtsdestoweniger das Wasser unter dem Aequator mit dem unter den Polen im Gleichgewicht ist, so muß es unter dem Aequator um so höher stehen, wodurch denn die Erde ihre abgeplattete Gestalt erhält, so daß der Durchmesser durch die beiden Pole kleiner ist, als der des Aequators.

§. 47.

Wir wollen nun zur Betrachtung des Falls übergehn, wo die von dem bewegten Punkt beschriebene Linie eine Ellipse ist, und zwar wollen wir fürs Erste annehmen, der Mittelpunkt der Anziehung befinde sich in dem Mittelpunkt der Ellipse selbst. s q m (fig. 12.) sey eine Ellipse, c ihr Mittelpunkt, q m die große Achse. Man denke sich wieder die Zeit, in welcher die ganze Ellipse durchlaufen wird, in unendlich viele gleiche Theile (jeden $= t$) getheilt. Der bewegliche Punkt befinde sich bei a, und habe eine Geschwindigkeit, womit er in Einem der eben genannten Zeittheilchen das Stück a i der Tangente bei a durchlaufen würde; wirklich durchlaufe er aber den elliptischen Bogen a l. Durch a ziehe man den Durchmesser a b und den ihm Conjugirten e d. Man verbinde ferner l mit i und c, ziehe $lg \# ai$, lh senkrecht auf ab, und af senkrecht auf ed. — Die Richtungen der Centripetalkraft gehen zwar allezeit durch c. Allein während des unendlich kleinen Zeittheilchens, worin der Bogen a l durchlaufen wird, kann man diese Richtungen als parallel ansehen. Daher ist l i der Weg, um welchen der Punkt durch die Wirkung der Centripetalkraft von der Tangente abweichet, und $li \# ac$. — Da der Durchmesser e d parallel mit der Tangente a i, also auch mit l g so ist $\angle iag = lgc = gef$. Da überdem $\angle h = f = R$, so ist $\triangle lhg \backsim acf$, daher

1) $lh : lg = af : ac$,

Also 2) $lh \,.\, ac = lg \,.\, af$.

Der Ausdruck $lh \,.\, ac$ also auch $lg \,.\, af$ ist aber für dieselbe

Ellipse *) eine unveränderliche Größe (indem es die doppelte Fläche des Dreiecks c l a oder des von dem Leitstrahl in einem der angenommenen Zeittheilchen (t) durchlaufenen Raumes ist. Allein in derselben Ellipse ist $ed \cdot af$ auch unveränderlich. Daher hat $ed \cdot af$ zu $lg \cdot af$ oder ed zu lg, also auch ed^2 zu lg^2 immer dasselbe Verhältniß, wo man auch den Punkt a in der Ellipse annehmen mag. In der Ellipse ist aber

3) $cd^2 : lg^2 = ab^2 : ag \cdot gb$.

Das letzte Glied dieser Proportion ($ag \cdot gb$) kann (da ag unendlich klein) $= ab \cdot ag$ gesetzt werden. Ueberdem ist $ag = li$. Hierdurch verwandelt sich 3) in

4) $cd^2 : lg^2 = ab^2 : ab \cdot li = ab : li$.

Da $cd^2 : lg^2$ unveränderlich, so setze man $\frac{lg^2}{cd^2} = p$. Hierdurch wird aus 4)

5) $li = p \cdot ab$.

Da li der Weg ist, durch welchen die Centripetalkraft den bewegten Punkt in dem angenommenen Zeittheilchen (t) treibt, so wird in derselben Ellipse und unter den hier angenommenen Umständen die Centripetalkraft im geraden Verhältniß der hier mit li bezeichneten Linie stehen. Nun ist aber an einem andern Punkt s der Ellipse (nach 5) die Größe dieser Linie $= p \cdot su$. Setzt man daher die Centripetalkraft bei a (in Gewicht ausgedrückt) $= V$, die Größe derselben bei $s = V'$, so hat man

6) $V : V' = p \cdot ab : p \cdot su = ab : su = ac : sc$;

d. h. 7) $V : V' = ac : sc$.

Wenn daher ein körperlicher Punkt sich in einer Ellipse bewegt, und es wirkt während seiner Bewegung keine andere Kraft auf ihn, als eine absolute, deren Richtung beständig durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, so steht die Größe dieser Kraft (die Centripetalkraft) an den verschiedenen Punkten der durch-

*) Wir setzen nämlich hier voraus, daß der bewegliche Punkt nur Ein- für Allemal Eine Bewegung erhalten, und außer der Centripetalkraft, die ihn nach dem Mittelpunkt c treibt, sonst von keiner andern Kraft getrieben wird.

laufenen Ellipse im geraden Verhältniß der Entfernung des bewegten Punktes vom Mittelpunkt.

Zusatz. Da unter den §. 48. angenommenen Umständen die Centripetalkraft in derselben Ellipse der Entfernung des bewegten Punktes vom Mittelpunkt der Ellipse proportional ist, so kann, wenn man diese (veränderliche) Entfernung z nennt, die Größe der Centripetalkraft durch $n.z$ dargestellt werden, wo n während eines Umlaufs durch dieselbe Ellipse ungeändert bleibt.

§. 48.

Wir gehn nun zu dem Fall über, wo die Richtung der Centripetalkraft beständig durch Einen der Brennpunkte der Ellipse geht, und wollen das Gesetz, nach welchem sich die Größe der genannten Kraft in diesem Fall ändern muß, suchen. — Zu dem Ende sey $d\alpha b$ (fig. 13.) eine halbe Ellipse, bd die große Achse, c der Mittelpunkt, φ der Brennpunkt, durch welchen die Richtung der Centripetalkraft geht, f der andere Brennpunkt, $o\alpha i$ eine Tangente an den (übrigens willkührlichen) Punkt α der Ellipse, wo sich der bewegte Punkt befindet, $\alpha\lambda$ ein unendlich kleiner Bogen derselben. Man ziehe die Linien $\lambda\varphi$, $\alpha\varphi$, αc, αf; fälle von λ auf $\alpha\varphi$, und αc die Perpendikel $\lambda\beta$, λh, verbinde β mit h, und ziehe $\lambda i \# \alpha g$, $\lambda\varepsilon \# \alpha c$, $\lambda\nu \# \alpha\varepsilon$, $ce \# \alpha\varepsilon$. Alsdann ist $\lambda i = \alpha g$, und $\lambda\varepsilon = \alpha\nu$. Ueberdem $\alpha e = cd$, d. h. der Hälfte der großen Achse. Zieht man nämlich noch durch den Brennpunkt f die Linie $fm \# \alpha\varepsilon$, so ist, da $c\varphi = cf$, auch $\varphi e = em$. — Ferner ist $< \alpha mf = = m\alpha\varepsilon$, $< \alpha fm = f\alpha o$. Da nun $< m\alpha\varepsilon = f\alpha o$, (indem die Tangente $\varepsilon\alpha o$ mit den nach den beiden Brennpunkten gezogenen Linien $\alpha\varphi$, αf gleiche Winkel macht), so ist auch $< \alpha mf = \alpha fm$, also $\alpha m = \alpha f$. Nun ist ferner $\alpha\varphi + \alpha f = bd$, oder = der großen Achse. Dabei $\alpha\varphi = \alpha m + m\varphi = \alpha m + 2.me = \alpha f + 2me$. Hierdurch erhält man $2\alpha f + 2.me = bd$, also $\alpha f + me = = \frac{1}{2}bd$, oder $\alpha e = \frac{1}{2}bd = cd$. Da die Winkel $\lambda\beta\alpha$, $\lambda h\alpha$ beide Rechte sind, so liegen die Punkte β, h in der Peri-

pherie eines Halbkreises, dessen Durchmesser $\lambda\alpha$ ist. Die Winkel $\beta\lambda h$, $\beta\alpha h$ sind daher als Winkel über derselben Sehne (βh) gleich. Aus demselben Grund (als Winkel über $\lambda\beta$) sind auch die Winkel $\lambda h\beta$, $\lambda\alpha\beta$ gleich. Der letzte dieser Winkel ($\lambda\alpha\beta$) ist, (da $\lambda\alpha$ unendlich klein ist, also mit der Tangente αi zusammenfällt) derselbe mit $i\alpha\beta$. Daher $<\lambda h\beta = i\alpha\beta = \alpha e c$. Daher ist $\Delta\beta\lambda h \sim c\alpha e$, und

1) $\lambda\beta : \lambda h = \alpha c : \alpha e$;
oder 2) $\lambda\beta : \lambda h = \alpha c : c d$.
Auch ist ferner $\Delta\alpha\gamma g \sim \alpha e c$; daher
3) $\alpha\gamma : \alpha g = \alpha c : \alpha e$ oder
4) $\lambda i : \lambda\varepsilon = \alpha c : \alpha e$.

Denken wir uns nun zwei körperliche Punkte, welche den Umfang dieser Ellipse in derselben Zeit durchlaufen, und zwar so, daß bei Einem die Richtung der Centripetalkraft beständig durch den Mittelpunkt c, bei dem andern hingegen durch den Brennpunkt φ geht. Dieses wird immer möglich seyn, da man das Verhältniß der den beiden Punkten ursprünglich mitgetheilten Geschwindigkeiten, und eben so die Größe der Centripetalkräfte annehmen kann, wie man will. Die unendlich kleinen Linien $\lambda\varepsilon$, λi stellen die Räume dar, durch welche in den beiden hier angenommenen Fällen die Centripetalkraft den bewegten Punkt während der Zeit treibt, in welcher derselbe den unendlich kleinen elliptischen Bogen $\alpha\lambda$ durchläuft, und zwar stellt die erste ($\lambda\varepsilon$) den Raum für den Fall, wo die Richtung der Centripetalkraft durch den Mittelpunkt (c), und die zweite (λi) den Raum für den Fall, wo sie durch den Brennpunkt φ geht, dar. Da $\lambda i \# \alpha\varphi$, $\lambda\varepsilon \# \alpha c$, $\varepsilon i \# e c$, so ist $\Delta\varepsilon\lambda i \sim e\alpha c$. Daher

5) $\lambda\varepsilon : \lambda i = \alpha c : \alpha e$,
oder 6) $\lambda\varepsilon : \lambda i = \alpha\varepsilon : c d$.

Da die Zeiten, in welchen die Ellipse beschrieben wird, in beiden Fällen gleich sind, und sowohl in dem einen als andern Fall (jeden für sich selbst betrachtet), der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft, so werden überhaupt, auch wenn man beide Fälle zusammen vergleicht, von demselben in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufen, oder überhaupt

die von den Leitstrahlen in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Räume sich wie die Zeiten verhalten. Während der bewegliche Punkt den Bogen $\alpha\lambda$ durchläuft, beschreibt der Leitstrahl im ersten Fall (wo die Centripetalkraft nach dem Mittelpunkt c gerichtet ist) den Flächenraum $\alpha c \lambda$, und im zweiten den Flächenraum $\alpha\varphi\lambda$. Nun ist aber der Flächenraum $\alpha c\lambda = \frac{1}{2}\alpha c . \lambda h$, und der Flächenraum $\alpha\lambda\varphi = \frac{1}{2}\alpha\varphi . \lambda\beta$. Also

7) $\alpha c\lambda : \alpha\lambda\varphi = \alpha c . \lambda h : \alpha\varphi . \lambda\beta$.

Allein nach 2) ist $\lambda h : \lambda\beta = cd : \alpha c$; daher

8) $\alpha c . \lambda h : \alpha\varphi . \lambda\beta = \alpha c . cd : \alpha\varphi . \alpha c = cd : \alpha\varphi$.

Hierdurch verwandelt sich

7) in

9) $\alpha c\lambda : \alpha\lambda\varphi = cd : \alpha\varphi$.

Nennt man daher die Zeiten, worin die Räume $\alpha c\lambda$, $\alpha\varphi\lambda$ beschrieben werden, d. h. die Zeiten, in welchen in beiden Fällen der Bogen $\alpha\lambda$ beschrieben wird, der Ordnung nach m, μ; so hat man

10) $m : \mu = cd : \alpha\varphi$.

In den Zeiten m, μ würde die Kraft unserer Schwere einen Körper durch die Räume $\frac{1}{2} . g . m^2$, $\frac{1}{2} g . \mu^2$ (§. 32. 1) treiben. Da nun die Centripetalkraft den Körper, im ersten Fall, in der Zeit m durch $\varepsilon\lambda$, und im zweiten, in der Zeit μ durch $i\lambda$ treibt, so hat man, wenn man die Kraft der Schwere $= 1$, die Centripetalkraft im ersten Fall $= p$, im zweiten $= p'$ setzt,

11) $1 : p' = \frac{1}{2} g . \mu^2 : i\lambda$.

12) $p : 1 = \varepsilon\lambda : \frac{1}{2} g m^2$.

Also 13) $p : p' = \varepsilon\lambda . \mu^2 : i\lambda . m^2$.

Setzt man in 13) statt der Verhältnisse $\varepsilon\lambda : i\lambda$, $\mu : m$ die gleichen 6) 10) $\alpha c : cd$, $\alpha\varphi : cd$, so erhält man

14) $p : p' = ac . \alpha\varphi^2 : cd^3$. $p : p'$ stellt das Verhältniß der Centripetalkräfte dar, wodurch der Körper bei der Bewegung durch denselben elliptischen Bogen getrieben wird, wenn die Richtung der Centripetalkraft einmal durch den Mittelpunkt und das anderemal durch den Brennpunkt der Ellipse geht. Nun kann man aber für den ersten Fall die Centripetalkraft $p = n . \alpha c$ setzen (§. 48. Zus.).

Hierdurch wird aus 14)

$$15)\ n . \alpha c : p' = \alpha c . \alpha \varphi^2 : c d^3.$$

Also $16)\ p' = \dfrac{n . c d^3}{\alpha \varphi^2}$

Da c d, also auch $c d^3$ in derselben Ellipse unveränderlich ist, so kann man $n . c d^3 = L =$ einer unveränderlichen Größe setzen. Hierdurch wird $p' = \dfrac{L}{\alpha \varphi^2}$.

Wenn daher in der Ellipse der Mittelpunkt der Anziehung sich in einem Brennpunkt befindet, so steht die Größe der Centripetalkraft im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung des beweglichen Punktes von diesem Brennpunkt.

§. 49.

Man kann von Demjenigen, was im Vorigen über die Centralkräfte gesagt worden, eine Anwendung auf einen der wichtigsten und schwierigsten Gegenstände der Naturlehre, nämlich auf die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne machen. Schon der große Kepler hatte durch scharfsinnige Vergleichung von Beobachtungen und Messungen die Regeln, nach welchen diese Bewegungen erfolgen, entdeckt, und dafür drei Gesetze, die in der Astronomie unter dem Namen der Kepler'schen bekannt sind, aufgefunden. Nämlich 1) die Bahnen, welche die Planeten um die Sonne, und eben so die Nebenplaneten um ihre Hauptplaneten beschreiben, sind alle Ellipsen, und die Sonne, oder der Hauptplanet, befindet sich in einem der Brennpunkte dieser Ellipse. 2) Der Leitstrahl, (radius vector) (vom Brennpunkt nach dem jedesmaligen Ort des Planeten) beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. 3) Die Quadrate der Zeiten, in welchen zwei verschiedene Planeten ihren Umlauf um die Sonne vollenden, verhalten sich wie die Würfel (die dritten Potenzen) ihrer mittlern Entfernungen von der Sonne.*) — So wichtig indessen

*) Die beiden ersten Gesetze entdeckte Kepler zugleich (1609)

die Kenntniß dieser Gesetze für die Astronomie war, so blieb doch der Hauptschrittt noch zu thun übrig, nämlich die Kraft aufzufinden, welche die Bewegungen der Planeten nach diesen Gesetzen regelt. Diese große Entdeckung, vielleicht die größte, die je dem menschlichen Geiste gelang, war dem unsterblichen englischen Naturphilosophen Newton vorbehalten. — Da alle bewegten Körper nach der Richtung, die ihnen einmal mitgetheilt worden, oder in gerader Linie fortgehn, so mußte es auffallend erscheinen, daß alle Planeten sich in krummlinigen Bahnen bewegen. Mit Recht hätte man daraus schließen sollen, daß eine Kraft auf sie einwirkte, welche sie von der Richtung, die sie genommen, beständig ablenkte. — Newton, welcher bedachte, daß die Kraft der Schwere, ohne merklich abzunehmen, sich bis zu den Gipfeln der höchsten Berge erstreckt, kam (im J. 1666) auf den Gedanken, dieselbe könne sich vielleicht bis zum Monde, und überhaupt bis zu den Gränzen aller Planetenbahnen erstrecken. Ist dieses aber, so wird diese Kraft auf die Bewegung der Planeten einwirken. Sie kann es alsdann seyn, welche dieselben beständig von ihrer Richtung ablenkt, und sie zwingt, in krummlinigen Bahnen fortzugehen. Da die Kraft, womit die Schwere die Körper nach der Oberfläche der Erde treibt, sich einzig nach ihrer Masse, ohne Rücksicht auf die Eigenthümlichkeit der Materie,

vorzüglich durch genaue Beobachtung des Planeten Mars. Er theilte diese wichtige Entdeckung zuerst in seiner Schrift: astronomia nova αιτιολογητοσ sive physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martiis. Pragae 1609. fol. der Welt mit. Das dritte Gesetz entdeckte Kepler etwas später (1618), indem er durch Rechnung zwischen den bekannten Entfernungen und Umlaufszeiten der Planeten gewisse Verhältnisse, worin nach seiner Meinung etwas Mystisches liegen sollte, suchte. Schon am 8. März (1618) ward er durch einen Einfall auf dieses dritte Gesetz geleitet. Allein er verrechnete sich damals, so daß er glaubte, seine Ahndung habe ihn betrogen. Am 15. Mai (1618) nahm er indessen dieselbe Rechnung nochmals vor, und fand mit einer Freude, die er sehr lebhaft beschreibt, die allgemeine Uebereinstimmung, die er sogleich öffentlich bekannt machte. Epitome astronomiae Copernicanae, Lincii 1618. 8. Harmonicae mundi libri V. Linc. 1619. fol.

woraus sie bestehn, richtet, so war es natürlich anzunehmen, daß dieselbe, wenn sie sich durch die ungeheuren Räume der Planetenbahnen erstreckte, hierin dem nämlichen Gesetze folge. Die Sonne, welche alle übrigen Planeten, so wie an Größe, also auch höchst wahrscheinlich an Masse bei weitem übertrifft, mußte also auch die stärkste Wirkung auf die übrigen Planeten ausüben. Als Newton diese Ansichten, wovon er, weil sie einigen damals bekannten Thatsachen zu widersprechen schienen, eine Zeitlang abgekommen war, weiter verfolgte, war sein vorzüglichstes Augenmerk, auszumitteln, wie die Bewegungen der Planeten unter der Voraussetzung beschaffen seyn müßten, daß denselben Ein- für Allemal eine Bewegung mitgetheilt worden, und sie außerdem von einer beständigen und absoluten Kraft nach der Sonne getrieben würden. Hier fand *) er denn nun bald, daß der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchlaufen müsse, so wie es dem zweiten von Kepler durch Beobachtung gefundenen Gesetze völlig gemäß ist. Newton suchte nun ferner, nach welchem Verhältniß die Kraft, womit jeder Planet nach der Sonne getrieben wird, mit der Entfernung von derselben ab- oder zunehmen müsse, damit die von ihm beschriebene Bahn eine Ellipse werde; so wie es den Beobachtungen gemäß wirklich ist. Newton bewies, daß zu dem Ende die Größe dieser Kraft im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung des Planeten von der Sonne stehen müsse. (Newton princip. philosoph. natural. Lib. I. sect. III. propos. XI.) Man sehe auch (§. 49.) Newton bewiese ferner (ibid. proposit. XII. et XIII.), daß auch, wenn die beschriebene Bahn eine Hyperbel oder Parabel ist, die Größe der Kraft in demselben, so eben angeführten Verhältnisse stehn müsse.

Newton behandelte noch die umgekehrte Aufgabe (ibid. propos. XIII. Coroll. 1 et propos. XVII., d. h. er untersuchte, was für eine Bahn ein Körper unter der Voraussetzung,

*) Newton machte seine Entdeckungen zuerst in dem unsterblichen Werk: philosophiae naturalis principia mathmeatica. Lond. 4. bekannt, welches 1687 zuerst erschien.

daß die Kraft, die ihn nach dem Mittelpunkt der Anziehung treibt, im umgekehrten Verhältniß des Quadrats seiner Entfernung von diesem Punkt steht, beschreiben müsse. Er fand, daß die beschriebene Bahn nothwendig ein Kegelschnitt seyn müsse, und daß es von der ursprünglich dem Körper mitgetheilten Bewegung abhange, ob die Bahn eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel sey. Allein der Beweis, den Newton an der angeführten Stelle für seinen Satz gegeben, ist den Geometern als nicht über jeden Einwurf erhaben vorgekommen. Ueberhaupt scheint die Auflösung dieser Aufgabe, die man auch die umgekehrte Aufgabe der Centralkräfte *) nennt, die Kräfte der Analysis, so weit sie damals bekannt war, zu übersteigen. Erst durch Hülfe der zwar von Newton erfundenen, aber noch nicht hinreichend vervollkommneten, Integralrechnung gelang es zuerst Joh. Bernoulli (Mém. de Paris 1710, und Op. tom. I. pag. 469) eine vollständige Auflösung derselben zu geben. Allein auch ohne diese Auflösung läßt sich das von Newton gefundene Gesetz (daß die Kraft, welche die Planeten nach der Sonne treibt, im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung steht) außer allen Zweifel setzen. Wenn nämlich dieses Gesetz allgemein gültig ist, so muß es nicht allein in den verschiedenen Punkten derselben Planetenbahn, sondern es muß überhaupt in allen Planetenbahnen durch-

*) Nämlich, wenn die krumme Linie gegeben ist, die ein körperlicher Punkt um den Mittelpunkt der Anziehung beschreibt, und man sucht, nach welchem Verhältniß die Kraft, die ihn nach diesem Mittelpunkt treibt, sich mit der Entfernung von demselben ändern müsse, so heißt dieses die gerade Aufgabe der Centralkräfte. Ein Fall derselben ist (§ 49) gelöst. Ist aber das Verhältniß, wie diese Kraft sich mit der Entfernung ändert, gegeben, und man sucht, welche Bahn demgemäß der körperliche Punkt beschreiben müsse, so heißt dieses die umgekehrte Aufgabe der Centralkräfte. Die Auflösung, welche, wie schon bemerkt worden, die Kenntniß der Integralrechnung erfordert, konnte hier nicht mitgetheilt werden. Diejenigen, welche mit dieser Rechnung vertraut sind, müssen sich in den Schriften über die physische Astronomie Raths erholen. Man sehe etwa die Elemente der physischen Astronomie von J. J. Littrow. Wien 1827.

einander, und in jeder mittlern Entfernung gelten; d. h. nicht allein die Kraft, mit welcher z. B. der Mars in den verschiedenen Punkten seiner Bahn nach der Sonne getrieben wird, muß im umgekehrten Verhältniß des Quadrats seines Abstandes von der Sonne stehn, sondern auch die Kraft, mit welcher ein Massentheilchen des Mars nach der Sonne getrieben wird, muß sich zu der Kraft, womit ein gleiches Massentheilchen des Jupiter nach der Sonne gezogen wird, verhalten, wie das Quadrat der Entfernung des letztern (d. Jupiter) von der Sonne sich zu dem Quadrat der Entfernung des erstern (des Mars) von derselben in demselben Augenblick verhält. Nimmt man aber dieses an, so wird das dritte Kepler'sche Gesetz eine unmittelbare Folge davon, wie (folg. §.) näher bewiesen werden wird.

§. 50.

Wenn ein körperlicher Punkt nach irgend einer Richtung Ein- für Allemal eine Bewegung von einer bestimmten Geschwindigkeit erhalten, und in einer auf diese Richtung senkrechten Linie befindet sich ein Punkt, nach welchem der erste Punkt beständig gezogen wird, so kann (wie früher bewiesen worden), die Größe dieser Kraft allezeit so bestimmt werden, daß der Punkt einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Anziehung, und dessen Halbmesser der erste Leitstrahl (der nach dem Ort, wovon der bewegliche Punkt ausging, gezogen wird), ist. Eben so kann man nun auch umgekehrt, wenn die Größe der Kraft, die den Körper beständig nach dem Mittelpunkt der Anziehung treibt, gegeben ist, die Geschwindigkeit, die dem Punkt nach einer auf den ersten Leitstrahl senkrechten Richtung gegeben wird, so bestimmen, daß er dadurch ebenfalls einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Anziehung, und dessen Halbmesser der erste Leitstrahl ist. —

Man betrachte nun zwei körperliche Punkte von gleicher Masse. Einer, worauf eine Centripetalkraft wirkt, die ihn beständig nach dem Brennpunkt f einer Ellipse dabh (fig. 14.) treibt, und die im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der

Entfernung steht, beschreibe den Umfang dieser Ellipse. Der andere soll durch die Wirkung derselben Kraft einen Kreis beschreiben, dessen Halbmesser der halben Achse der Ellipse gleich ist. Es fragt sich, wie groß die Geschwindigkeit sey, die dazu dem zweiten Punkt Ein- für Allemal nach einer auf den ersten Leitstrahl senkrechten Richtung ertheilt werden muß. Man denke sich, der erste Punkt befinde sich bei a (fig. 14.) an einem Endpunkt der halben kleinen Achse, der andere befinde sich ebenfalls bei a, und fange von a an um den Mittelpunkt f einen Kreis von dem Halbmesser af = bc, wovon ap einen Bogen darstellt, zu beschreiben. al sey ein, in einer unendlich kleinen Zeit beschriebener Bogen der Ellipse; am ein in derselben Zeit beschriebener Bogen des Kreises; aβ, an seyen Tangenten an die eine und andere krumme Linie, und überhaupt Alles so vorgerichtet, wie (fig. 14.) näher zeigt. In dem Kreis hat man (da ao unendlich klein, also of = af, ao = mn)

1) $om^2 = 2 . ao . af = 2 . af . mn$;

also 2) $\dfrac{om^2}{2 . af} = mn.$

Eben so hat man in der Ellipse bad

3) $lg^2 = \dfrac{bc^2}{ac^2}\, ag . gh$, oder da (wegen ag unendlich klein) $gh = 2 . ac$,

4) $lg^2 = \dfrac{bc^2}{ac^2} . 2\, ag . ac$;

also 5) $\dfrac{ac . lg^2}{2 . bc^2} = ag.$

βf ist unendlich groß gegen den Bogen al; daher kann man βl, af als parallel ansehen. Da nun auch $\alpha l \# ac$, so ist $\Delta afc \backsim \alpha l \beta$. Daher

6) $ac : af = \alpha l : l\beta = ag : l\beta$ (indem $\alpha l = ag$).

Also 7) $\dfrac{af . ag}{ac} = \dfrac{bc . ag}{ac} = l\beta.$

Die Linien mn, $l\beta$ sind die Räume, durch welche die Centralkräfte den einen und andern beweglichen Punkt, wenn er

sich bei a befindet, in demselben unendlich kleinen Zeittheilchen (den ersten im Kreis, und den andern in der Ellipse) treiben. Da nun in dem genannten Augenblick der erste im Kreis von dem Mittelpunkt der Anziehung f eben weit entfernt ist, als der andere in der Ellipse, so ist auch die Wirkung der Centripetalkraft in beiden Fällen gleich, daher

8) $mn = l\beta$, oder nach 2) 7)

9) $\frac{om^2}{2.af} = \frac{bc.ag}{ac}$.

Setzt man statt ag seinen Werth aus 5), so erhält man

10) $\frac{om^2}{2.af} \left(= \frac{om^2}{2.bc}\right) = \frac{lg^2}{2.bc}$.

Also 11) $om^2 = lg^2$, $om = lg$, oder auch Bog. ap = = Bog. al. —

Die Geschwindigkeit, welche dem zweiten körperlichen Punkt (der den Kreis beschreiben soll) mitgetheilt wird, muß daher so groß seyn, als die des ersten (der sich in einer Ellipse bewegt), in dem Augenblick ist, wo er durch den Endpunkt (a) der kleinen Achse der Ellipse geht.

Zusatz. Da $a\beta$ senkrecht auf ac, also $a\beta \# fc$, so sind die Flächen der Dreiecke $af\beta$, $ac\beta$ gleich, folglich auch (da $al\beta$ unendlich klein gegen $af\beta$) $afl = acl$ (an Fläche). Die Flächen der Dreiecke afm, $af\beta$ verhalten sich, da ihre Grundlinien am (= om), al (= lg) gleich sind, wie ihre Höhen, d. h. man hat in Beziehung auf die Fläche

1) $\Delta afm : \Delta af\beta = af : ac = bc : ac$.

Nun verhält sich aber die Fläche des Kreises zu der der Ellipse bekanntlich auch wie bc : ac. In dem Augenblick, wo die beweglichen Punkte sich bei a befinden, verhält sich also der, von dem Leitstrahl in dem Kreis durchlaufene Raum zu dem in der Ellipse in derselben Zeit durchlaufenen, wie die Fläche des Kreises zu der der Ellipse. Da nun in der einen wie in der andern dieser krummen Linien, wenn man jede für sich betrachtet, der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft, so muß der zweite Punkt den angegebenen Kreis in derselben Zeit durchlaufen, worin der erste die Ellipse durchläuft.

§. 51.

Nach (§. 44. 8.) hat man in einem Kreis für die Größe der Centripetalkraft V

1) $V = \frac{f^2 . P}{g . r}$, wo P die Masse des bewegten Körpers, f die Geschwindigkeit desselben, und r den Halbmesser des beschriebenen Kreises bedeutet. Man kann aus dieser Gleichung auch umgekehrt, wenn die Größe (V) der Centripetalkraft, und überdem r und P gegeben sind, die Geschwindigkeit f finden, die der Körper erhalten muß, um wirklich einen Kreis von dem Halbmesser r zu beschreiben. Man erhält aus 1)

2) $f = \sqrt{\left(\frac{g . r . V}{P}\right)}$.

Nimmt man an, daß die Kraft, welche den bewegten Punkt nach dem Brennpunkt f (fig. 14.) hinzieht, nach dem oben für die allgemeine Schwere angegebenen Gesetz (daß sie nämlich mit der Masse des bewegten Körpers im geraden und mit dem Quadrat der Entfernung desselben vom Mittelpunkt der Anziehung im umgekehrten Verhältniß steht), wirkt, so kann man die Größe dieser Kraft in einem Kreis von dem Halbmesser r durch $\frac{A . P}{r^2}$ ausdrücken, wo A irgend eine beständige Größe ist, die von der absoluten Stärke der Kraft abhängt, womit ein körperlicher Punkt von einer bestimmten Masse bei einer bestimmten Entfernung von dem Mittelpunkt der Anziehung nach diesem getrieben wird. Setzt man statt V diesen Werth in 2), so erhält man

3) $f = \sqrt{\left(\frac{g . A .}{r}\right)}$.

Dieses ist also die Geschwindigkeit, die der bewegte Punkt bei irgend einer Größe von V haben muß, um einen Kreis von dem Halbmesser r zu durchlaufen. Da der Umfang dieses Kreises $= 2\pi r$, und die Geschwindigkeit (f) im Kreis sich nicht ändert, so hat man, wenn die Zeit, in welcher dieser Kreis durchlaufen wird, = t gesetzt wird,

$$4)\ t = \frac{2\pi r}{f} = \frac{2\pi r \sqrt{r}}{\sqrt{(g.A)}}.$$

Nun durchläuft aber (nach §. 50. Zus.) ein bewegter Punkt, der nach dem Brennpunkt einer Ellipse von derselben und nach demselben Gesetz sich verändernden Kraft gezogen wird, diese Ellipse in derselben Zeit, in welcher der eben angeführte Punkt den Kreis durchläuft, wenn die halbe große Achse der Ellipse dem Halbmesser des Kreises gleich ist. Ist also für einen Planeten die halbe große Achse seiner Bahn = d, so hat man für die Zeit t Eines seiner Umläufe.

$$5)\ t = \frac{2\pi d \sqrt{d}}{\sqrt{(g A)}};$$

wo nur in 4) statt r die Größe d gesetzt ist. — Für einen andern Planeten ist die Centripetalkraft, nämlich die allgemeine Schwere, ganz dieselbe, nur daß ihre Stärke, gerade wie für den ersten, sich sowohl nach seiner Masse als nach seiner Entfernung vom Mittelpunkt der Anziehung, oder vom Brennpunkt seiner Bahn richtet. Daher hat A in beiden Fällen denselben Werth. Setzt man daher die halbe große Achse der Bahn des zweiten = D, die Zeit eines Umlaufs = T, so hat man:

$$6)\ T = \frac{2\pi D \sqrt{D}}{\sqrt{(g A)}}.$$

Also aus 5) und 6)

$$7)\ T : t = \frac{2\pi D \sqrt{D}}{\sqrt{(g:A)}} : \frac{2\pi d \sqrt{d}}{\sqrt{(g A)}};$$

oder 8) $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$, welches das dritte von Kepler durch Beobachtung gefundene Gesetz ist.

§. 52.

Im Vorigen ist immer nur von einem bewegten Punkte gesprochen, und selbst die Planeten sind als solche betrachtet worden. Da sowohl ihr Durchmesser, als auch der der Sonne gegen ihre Entfernung von dem Mittelpunkt der Anziehung (der Sonne) nur sehr klein ist, so kann man auch ohne merklichen Fehler ihre ganze Masse, als in ihrem Mittelpunkt ver-

einigt, annehmen, und unter dieser Voraussetzung die Bewegung dieses Punktes untersuchen. Wir wollen indessen jetzt näher untersuchen, was für Veränderungen dadurch entstehen, daß die Planeten sowohl, wie die Sonne, keine einzelne Punkte, sondern Körper von bestimmter Ausdehnung sind.

Es ist schon (§. 49.) bemerkt worden, daß Newton auf seine großen Entdeckungen vorzüglich durch den Gedanken geleitet worden, daß die Wirkung der Schwere, so wie sie sich auf der Erde an allen Körpern ohne Unterschied des Stoffs, woraus sie bestehen, äußert, sich auch auf die Planeten erstrecken müsse. Er nannte daher auch die Kraft, wodurch alle Planeten nach der Sonne getrieben werden, die allgemeine Schwere (gravitas universalis, gravitatio). Ueber die Natur dieser Kraft, und wie sie ihre Wirkung hervorbringt, ob z. B. die Sonne die Planeten anzieht, oder ob die Einwirkung dieser Körper aufeinander durch Vermittelung eines von ihnen ausgehenden, oder auch eines, durch den allgemeinen Weltraum verbreiteten, Fluidums geschehe, darüber hat sich Newton nicht bestimmter erklärt *); nur behauptet er bestimmt, daß sie nichts anderes, als die Schwere sey. **) Auch geht aus dem ganzen Zusammenhang seines Vortrags hinreichend hervor, daß er der Idee, daß die Sonne und die Planeten sich wechselseitig anziehen, den Vorzug gibt. Wenn aber diese Kraft mit unserer Schwere identisch ist, so folgt daraus, daß die Stärke, womit irgend ein bestimmter Körper mehrere an-

*) Princip. philosoph. natur. lib. III. prop. V. Schol. sagt er: hactenus vim illam, qua corpora coelestia in orbibus suis retinentur, centripetam appellavimus. eandem jam gravitatem esse constat, et propterea gravitatem in posterum vocabimus, nam causa vis illius centripetae, qua luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I. II. et IV.

**) Newton bedient sich meistens des Ausdrucks: Alle Körper sind gegen die Planeten schwer; der Mond ist schwer gegen die Erde u. s. f. Corpora omnia in planetas gravitant, luna gravitat in terram u. s. f. Seltner spricht er von einer Anziehung derselben gegeneinander, so wie lib. III. proposit. VI., wo es heißt: nam si horum (scil. satellitum) aliqui magis traherentur in solem, quam caeteri etc.

dere, die sich in gleicher Entfernung von ihm befinden, anzieht, im geraden Verhältniß der Masse der angezogenen steht. Newton beweist diesen Satz, der übrigens durch die genaue Uebereinstimmung aller daraus gezogenen Schlüsse mit der Erfahrung über jeden Zweifel erhaben ist, noch durch die regelmäßige Bewegung der Trabanten des Jupiter, welche nicht Statt finden könnte, wenn die Kräfte, womit sowohl der Jupiter, als seine Trabanten, nach der Sonne gezogen werden, den Massen derselben nicht proportional wären (princip lib. III. prop. VI. Wir wollen daher unter Voraussetzung der Wahrheit des Satzes eine Anwendung davon auf den im Anfang dieses (§.) näher bezeichneten Gegenstand machen.

§. 53.

a b (fig. 15.) stellen zwei körperliche Punkte (kleine Körper) von gleichem oder ungleichem Volumen dar, deren Dimensionen indessen gegen die Entfernung derselben voneinander unendlich klein oder so klein sind, daß man alle geometrischen Punkte des einen, von allen geometrischen Punkten des andern als gleichweit entfernt, ansehen kann. Wenn nun diese Körper a b sich nach dem oben erklärten Gesetz der Schwere wechselseitig anziehn, so wird a von b mit derselben Kraft angezogen, womit auch b von a angezogen wird. — Man denke sich nämlich beide Körper in unendlich viele Theile, welche alle (in beiden Körpern) an Masse gleich sind, getheilt, a enthalte m, b aber n solcher Theile. Nun wird offenbar Ein solcher Theil des einen Körpers Einen Theil des andern eben stark anziehen, als er wieder von diesem angezogen wird (indem die Masse für jeden Theil des einen Körpers gerade so ist, wie für jeden Theil des andern). Setzt man nun die Kraft, womit bei der angenommenen Entfernung beider Körper, Ein Theil des Einen Einen Theil des andern anzieht (in Gewicht ausgedrückt) = p, so wird, da ein jeder Theil von a einen jeden Theil von b mit einer Kraft = p zieht, und in b die Zahl der angezogenen Theile = n ist, b im Ganzen von einem Theil von a mit einer Kraft = n . p, also von allen (m) Theilen von a mit einer Kraft = m . n . p gezogen.

Ganz auf dieselbe Art läßt sich aber auch beweisen, daß a von b mit einer Kraft = n . m . p gezogen wird.

§. 54.

Man denke sich einen zwischen zwei concentrischen Kugelflächen enthaltenen Körper, eine hohle Kugel. Die Halbmesser der äußern und innern Oberfläche sind zwar an und für sich willkührlich, doch seyen sie nur unendlich wenig von einander verschieden. Alle Theile des Körpers werden von einem außerhalb desselben gelegenen körperlichen Punkt, und zwar nach dem Gesetz der allgemeinen Schwere angezogen. Wenn man nun um denselben Mittelpunkt eine andere ähnliche, größere oder kleinere, hohle oder massive Kugel beschreibt, deren Masse aber eben groß ist, als die der ersten, so wird dieselbe von dem angenommenen Punkt eben stark angezogen als die erste. — γ (fig. 28.) sey der Mittelpunkt, γ h der Halbmesser der äußern Fläche der ersten Kugel; h β p n ein mit diesem letzten Halbmesser aus γ beschriebener Halbkreis, α der anziehende Punkt. Von diesem Letztern ziehe man zwei Linien $\alpha\pi$, αp, die unter einem unendlich kleinen Winkel gegeneinander geneigt sind. Man denke sich, dieselben drehen sich um $\alpha\gamma$ als Achse herum. Alsdann werden sie von der Kugel zwei Zonen, eine bei π und eine andere bei β abschneiden. Für die letztere ist die Breite = bβ, und der Halbmesser des größten, sie begränzenden, Kreises = βg. Was die Dicke des körperlichen Theils, von β nach γ genommen, betrifft, so muß, da die Massen der betrachteten Kugeln gleich seyn sollen, die Dicke einer jeden im umgekehrten Verhältniß ihrer Oberfläche oder des Quadrats ihres Halbmessers stehn. Die Masse der abgeschnittenen Zone wird also im geraden Verhältniß der Größe des Produktes $\frac{b\beta \,.\, \beta g}{\beta\gamma^2}$ stehen. Die Kraft, womit der Punkt α von der Zone nach $\alpha\gamma$ gezogen wird, würde im zusammengesetzten Verhältniß der Masse der Zone und des Quadrats der Entfernung $\alpha\beta$, und zwar im umgekehrten dieser letztern, stehn, wenn die Richtung $\alpha\beta$ nicht schief gegen

$\alpha\gamma$ wäre. Dieses letztern Umstandes wegen wird die Kraft im Verhältniß von $\alpha g : \alpha\beta$, oder von $\alpha\delta : \alpha\gamma$ *) vermindert, wenn man nämlich $\gamma\delta$ senkrecht auf $\alpha\beta$ zieht, wo denn $\Delta\,\alpha\gamma\delta \backsim \alpha\beta g$. Die Kraft kann also vorgestellt werden durch $\frac{b\beta \,.\, \beta g \,.\, \alpha\delta}{\beta\gamma^2 . \alpha\beta^2 . \alpha\gamma}$. — Man denke sich eine andere, mit der ersten concentrische, ebenfalls hohle Kugel, deren äußerer Halbmesser $\gamma\mu$, und die an körperlichem Inhalt der ersten gleich ist. $i q \mu$ sey ein größter Halbkreis dieser zweiten Kugel, und von α aus seyen wieder zwei Secanten $\alpha\varphi\psi$, $\alpha f q$, die sich unter einem unendlich kleinen Winkel $n\alpha q$ schneiden, gezogen. Dabei fasse der Bogen $\varphi\psi$ eben viele Grade, als $\beta\pi$, und $f q$ eben viele, als $b p$. Wenn nun die beiden letztern Secanten sich auch um die Achse $\alpha\mu$ herumdrehn, so werden sie von der zweiten Kugel ebenfalls eine Zone abschneiden, welche den Punkt α nach $\alpha\gamma$ eben stark zieht, als die zugehörige Zone der ersten Kugel. Nämlich demgemäß, was für die erste Kugel bewiesen worden, wird die Kraft, womit die Zone oder der Ring der zweiten Kugel den Punkt α zieht, vorgestellt werden können durch $\frac{\varphi f \,.\, \varphi\lambda \,.\, \alpha\varepsilon}{\alpha\varphi^2 . \gamma\varphi^2 . \alpha\gamma}$, wenn $\gamma\varepsilon$ das Perpendikel von γ auf $\alpha\varphi$ ist. Da der Winkel $p\alpha\pi$ unendlich klein ist, so kann $\gamma\delta$, welche senkrecht auf $\alpha\delta$, auch als senkrecht auf $b p$ gelten, so daß $\angle d = R$. Eben so gilt $\gamma\varepsilon$, welche senkrecht auf $\alpha\psi$, auch für senkrecht auf αq, so daß auch $\angle e = R$. Da $\beta\pi$ mit $\varphi\psi$, und $b p$ mit $f q$ eben viele Grade faßt, so ist

1) $\gamma\delta : \gamma d = \gamma\varepsilon : \gamma e$

also 2) $\gamma\delta - \gamma d : \gamma\varepsilon - \gamma e = \gamma\delta : \gamma\varepsilon$,

oder 3) $\delta d : \varepsilon e = \gamma d : \gamma\varepsilon$.

Ferner ist

4) $\gamma\delta : \alpha\gamma = \beta g : \alpha\beta$,

5) $\alpha\gamma : \gamma\varepsilon = \alpha\varphi : \varphi\lambda$.

---

*) Indem nämlich beide Dreiecke $\beta\alpha g$, $\delta\alpha\gamma$, da sie bei g, δ rechtwinkelig, und den Winkel bei α gemeinschaftlich haben, ähnlich sind.

Durch Verbindung von 4) und 5) erhält man

6) $\gamma\delta : \gamma\varepsilon = \alpha\varphi . \beta g : \alpha\beta . \varphi\lambda$;

oder auch 7) $\gamma\beta : \gamma\varphi = \alpha\varphi . \beta g : \alpha\beta . \varphi\lambda$;

also 8) $\gamma\beta . \alpha\beta . \varphi\lambda = \gamma\varphi . \alpha\varphi . \beta g$.

9) $$\frac{\varphi\lambda}{\gamma\varphi . \alpha\varphi} = \frac{\beta g}{\gamma\beta . \alpha\beta}$$

und 10) $$\frac{\varphi\lambda^2}{\gamma\varphi^2 . \alpha\varphi^2} = \frac{\beta g^2}{\gamma\beta^2 . \alpha\beta^2}.$$

Aus α als Mittelpunkt seyen ferner die unendlich kleinen Bogen bm, fn beschrieben. Alsdann sind die vier Dreiecke $\delta\gamma\beta$, $\varepsilon\gamma\varphi$, $m\beta b$, $n\varphi f$ einander ähnlich. Dieselben sind nämlich alle vier rechtwinkelig.*) Dabei hat der Winkel $\beta\gamma\delta$ zum Maß den halben Bogen $\beta\pi$, und der Winkel $\varphi\gamma\varepsilon$ hat zum Maß den halben Bogen $\varphi\psi$, welche Bogen ($\beta\pi$, $\varphi\psi$) eben viele Grade fassen. Daher ist $\Delta\beta\gamma\delta \backsim \varphi\gamma\varepsilon$. Ferner ist $< m\beta b = 180 - \delta\beta\gamma - \gamma\beta b = 90 - \delta\beta\gamma$ (indem $\gamma\beta b = 90^0$). Da nun auch $\beta\gamma\delta = 90 - \delta\beta\gamma$, so ist $< m\beta b = \beta\gamma\delta$, also $\Delta m\beta b \backsim \delta\beta\gamma$. Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, daß $\Delta n\varphi f \backsim \Delta\varphi\gamma\varepsilon$. Da nun die beiden größern unter diesen vier Dreiecken, ($\delta\beta\gamma$, $\varphi\gamma\varepsilon$) ähnlich sind, so sind sie alle vier ähnlich. Demgemäß ist

11) $\beta b : \varphi f = bm : fn$,

12) $bm : \delta d = \alpha\beta : \alpha\delta$ **),

13) $\delta d : \varepsilon e = \gamma\delta : \gamma\varepsilon$ (nach 3);

also aus 6) 14) $\delta d : \varepsilon e = \beta g . \alpha\varphi : \alpha\beta . \varphi\lambda$.

15) $\varepsilon e : fn = \alpha\varepsilon : \alpha\varphi$.

Durch Verbindung von 12), 14 und 15) kommt

16) $bm : fn = \alpha\beta . \beta g . \alpha\varphi . \alpha\varepsilon : \alpha\delta . \alpha\beta . \varphi\lambda . \alpha\varphi$,

oder $bm : fn = \beta g . \alpha\varepsilon : \alpha\delta . \varphi\lambda$;

also in Verbindung mit 11)

17) $\beta b : \varphi f = \beta g . \alpha\varepsilon : \alpha\delta . \varphi\lambda$,

also 18) $\varphi f . \beta g . \alpha\varepsilon = \beta b . \alpha\delta . \varphi\lambda$.

---

*) Die unendlich kleinen Bogen m b, n f sind nämlich als Tangenten bei m und n anzusehen.

**) Eigentlich $= \alpha m : \alpha\delta$. Aber da $m\beta$ unendlich klein gegen αm, so kann man $\alpha\beta$ statt αm setzen.

Multiplicirt man die Gleichung 18) mit der 10), und zwar die linke Seite mit der linken, und die rechte mit der rechten, und dividirt beide Produkte durch

$\beta g . \varphi \lambda . \alpha \gamma$, so kommt

$$19) \quad \frac{\varphi f . \alpha \varepsilon . \varphi \lambda}{\gamma \varphi^2 . \alpha \varphi^2 \alpha \gamma} = \frac{\beta b . \alpha \delta . \beta g}{\gamma \beta^2 . \alpha \beta^2 . \alpha \gamma}.$$

Die Glieder der zuletzt gefundenen Gleichung sind genau dieselben mit den beiden Ausdrücken, welche, nach dem oben Erwiesenen, die Kraft darstellen, womit die Zone oder der Ring der einen und andern Kugel den Punkt α nach $\alpha \gamma$ zieht. Diese Kraft ist also für den einen Ring so groß, als für den andern. — Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, daß der zu πp gehörige Ring der einen Kugel den Punkt α eben stark zieht, als der zu ψq gehörige der andern Kugel. — Man stelle sich nun eine ganze Kugel von gleichförmiger Dichtigkeit, die γ zum Mittelpunkt und γh zum Halbmesser hat, vor. Man denke sich den Halbmesser in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspunkte concentrische Kugeloberflächen gelegt. Hierdurch wird die Kugel in unendlich viele körperliche Stücke getheilt, die unendlich dünn, und von zwei concentrischen Kugelflächen begränzt werden. Man denke sich nun um γ noch eine andere Kugelfläche, deren Halbmesser γi gegen $\alpha \gamma$ unendlich klein ist, beschrieben. Wird alsdann um γ noch eine andre Kugelfläche von einem größern Halbmesser so beschrieben, daß das zwischen denselben enthaltene körperliche Stück eben viel Masse enthält, als eines derjenigen, worin die größere Kugel getheilt worden, so wird nach dem, was im Vorigen erwiesen worden, jenes den Punkt α eben stark anziehn als dieses; unter der Voraussetzung jedoch, daß die Dicke des massiven Theils von jenem unendlich klein gegen den schon unendlich kleinen Halbmesser γi ist. *) — Nun wird zwar, wenn eine hohle Kugel, deren innerer Halbmesser γi, mit dem

*) Nämlich bei den vorhergehenden Beweisen wird immer vorausgesetzt, daß der massive Theil der hohlen Kugel unendlich dünn ist, welches immer im Verhältniß gegen ihren innern und äußern Halbmesser zu verstehen ist.

äußersten Stück der größern Kugel (wovon der Halbmesser γ h) gleiche Masse haben soll, die Dicke der erstern gegen die der letztern unendlich groß seyn müssen. Allein, da man die Theile, worin man sich den Halbmesser γ h getheilt denkt, oder die Dicke eines jeden Stücks der Kugel so klein nehmen kann, als man will, so wird man sie auch so vermindern können, daß die Dicke der obschon unendlich kleinen hohlen Kugel, die mit einem Stück der größern gleiche Masse hat, selbst gegen den unendlich kleinen Halbmesser γ i unendlich klein ist. Dabei wird, von dem äußersten Stück der großen Kugel angerechnet, die Dicke der unendlich kleinen hohlen Kugel, die an Masse den nacheinander folgenden Stücken der großen Kugel gleich ist, immer kleiner und kleiner werden, indem die Masse der Stücke der großen Kugel von der Oberfläche nach dem Mittelpunkt hin immer abnimmt. Daher wird jedes Stück der großen Kugel den Punkt α eben stark nach $\alpha\gamma$ ziehn, als eine hohle Kugel von einem unendlich kleinen Halbmesser, die oben mit ihm gleiche Masse hat. Die Summe der Kräfte, womit alle Stücke der großen Kugel den Punkt α ziehn, ist also der Summe der Kräfte, womit er von allen diesen unendlich kleinen Kugeln gezogen wird, gleich. Da nun offenbar jede unendlich kleine Kugel ihn so zieht, als ob ihre Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre, so gilt dasselbe von der größern oder ganzen Kugel (von dem Halbmesser γ h).

Zus. Wenn eine körperliche Kugel auch nicht durchaus von gleichförmiger Dichtigkeit ist, sondern aus noch so vielen, durch concentrische Kugelflächen geschiedenen, Stücken besteht, die alle in Hinsicht der Dichtigkeit verschieden sind, wenn nur in jedem dieser Stücke für sich die Dichtigkeit gleichförmig ist; so wird dennoch die Kugel einen außerhalb befindlichen körperlichen Punkt α so anziehn, als ob ihre Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre.

§. 55.

Wenn eine Kugel, deren Dichtigkeit entweder gleichförmig, oder worin auch die Dichtigkeit nach dem (Vorig. §. Zus.)

angegebenen Gesetz veränderlich ist, nicht von einem unendlich kleinen materiellen Punkt, sondern von einer andern massiven oder hohlen Kugel, von einem endlichen Halbmesser, worin die Dichtigkeit gleichförmig, oder auch so wie eben bemerkt, vertheilt ist, gezogen wird, so ist die Kraft, womit jede nach dem Mittelpunkt der andern gezogen wird, so groß, als ob die Masse einer jeden in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. Nämlich die Kraft, womit jeder materielle Punkt der ersten die zweite zu sich zieht, ist eben stark, als ob die Masse dieser letztern in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre, und eben so stark ist offenbar auch die Kraft, womit die zweite jeden Punkt der ersten zu sich zieht, nur daß die Richtung der letztern Kraft der der ersten gerade entgegengesetzt ist. Man kann sich daher ohne in Hinsicht der Stärke der Anziehung Etwas zu ändern die Masse der Zweiten in ihrem Mittelpunkt vereinigt denken. Dieser Mittelpunkt würde aber alsdann die erste eben stark anziehn, und von ihr eben stark gezogen worden, als ob die Masse der ersten ebenfalls in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre.

Anmerk. Aus dem (vorig. §.) Erwiesenen erhellt noch deutlicher, daß man bei der Bewegung der Planeten, in so fern sie von der Anziehung der Sonne bestimmt wird, die Sonne sowohl, als auch die Planeten, als Punkte betrachten kann, wenn man nämlich die Massen derselben als in ihrem Mittelpunkt vereinigt annimmt.

§. 56.

Man kann von dem im vorigen Erwiesenen noch eine Anwendung auf eine wichtige Aufgabe machen, nämlich auf die: das Verhältniß der Massen der Planeten zu finden. Man denke sich zuerst wieder einen körperlichen Punkt, worauf eine Centralkraft, und zwar auf alle Theile seiner Masse gleichförmig wirkt. Dieselbe treibe ihn beständig nach dem Brennpunkt einer Ellipse mit einer Gewalt, die im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung steht, um welche der Punkt vom Brennpunkt absteht. Wenn nun der Punkt durch diese Kraft und vermöge einer ein für allemal erhaltenen Bewegung in dem Umfang der Ellipse umläuft, so kann man (nach §. 51) die Größe der Centripetalkraft, welche auf den Punkt an jedem

Ort seiner Bahn wirkt, durch $\frac{A.P}{r^2}$ ausdrücken, wo P die Masse des Punktes, r seine Entfernung vom Brennpunkt und A irgend einen beständigen Factor bedeutet. Die Größe dieses Factors hängt offenbar von der absoluten Größe der Centripetalkraft, d. h. von der Stärke ab, womit sie bei einer bestimmten Entfernung auf jeden einzelnen Theil der Masse eines beweglichen Punktes wirkt. Nehmen wir, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, an, die Centralkraft werde durch die Anziehung der Sonne hervorgebracht, und der Durchmesser der Sonne sowohl, als aller Planeten sey gegen ihre Entfernung unendlich klein, so würde, wenn die Sonne auf einmal anfinge, die andern Planeten dreimal so stark anzuziehen, als vorhin, der Werth von A für alle Planetenbahnen dreimal so groß werden, als er war. Da man, wenn zwei Kugeln sich nach dem für die allgemeine Schwere bewiesenen Gesetze anziehen, ihre Massen als in ihrem Mittelpunkt vereinigt annehmen kann, so wird das so eben Gesagte für die Sonne und Planeten auch noch gelten, wenn man sie nicht als körperliche Punkte, sondern als Kugeln von einem bestimmten Durchmesser betrachtet, d. h. auch dann noch wird der Werth von A gänzlich von der Kraft abhängen, womit die Sonne einen bestimmten Theil der Masse in einer bestimmten Entfernung anzieht. Dieser Werth ist daher für alle Planeten, die sich um die Sonne bewegen, gleich groß, indem die Sonne zwei gleiche Massentheile von zwei verschiedenen Planeten in gleicher Entfernung auch gleich stark anzieht. Gäbe es aber einen andern Himmelskörper, um welchen sich ebenfalls Planeten gerade so wie um die Sonne in Ellipsen bewegten, und die von diesem nach demselben Gesetz angezogen würden, so könnte A dafür einen andern Werth haben. Nehmen wir an, daß ein bestimmtes Massentheilchen dieses anziehenden Körpers einen andern Körper eben stark anzieht, als er von einem gleichen Massentheilchen der Sonne bei gleicher Entfernung gezogen wird, d. h. wirkt der zweite anziehende Körper auch ganz nach den schon erklärten Gesetzen der allgemeinen Schwere, so wird sich die Anziehungskraft, die er auf einen bestimmten Theil einer Masse

ausübte, sich zu dem von der Sonne, bei gleicher Entfernung ausgeübten verhalten, wie seine Masse zu der Masse der Sonne; und eben so müssen sich die Werthe von A für diese beiden anziehenden Körper verhalten. Nun beschreibt aber, so wie die Erde und alle Planeten um die Sonne Ellipsen beschreiben, der Mond eine um die Erde; und diese letztere ist eben so der anziehende Körper für den Mond, wie die Sonne für die Erde. Könnte man daher die für die Mond- und Erdbahn gehörigen Werthe von A bestimmen, so hätte man zugleich das Verhältniß der Massen der Erde und Sonne. Nun ist aber, wenn man die große Achse einer Planetenbahn = d, die Zeit eines Umlaufs = t setzt, nach (§. 51. 5.)

$$1)\ t = \frac{2\pi d . \sqrt{d}}{\sqrt{(g . A)}}$$

$$\text{Also } 2)\ \frac{4\pi d^3}{g\,t^2} = A.$$

Setzt man in 2), der Ordnung nach, statt t die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, und die des Mondes um die Erde, so wie statt d die großen Achsen der Erd- und Mondbahn, so erhält man die Werthe von A für beide Bahnen, also das Verhältniß der Massen der Sonne und Erde; z. B. die Erdbahn hat ungefähr eine 400-mal größere Achse, und sie wird in einer etwa 13-mal größern Zeit durchlaufen als die Mondbahn. Man kann daher für die Erdbahn d = 400, t = 13 setzen. Hierdurch wird für die Mondbahn d = 1; t = 1. So findet man, daß die Masse der Sonne ungefähr 378000-mal größer, als die der Erde ist. Die Rechnung bedarf indessen noch einer kleinen Berichtigung, nicht allein wegen der Werthe von d und t, die hier nicht völlig genau angegeben sind, sondern auch, weil die Sonne nicht allein auf die Erde, sondern auch auf den Mond wirkt, wodurch die Bewegung desselben in etwas geändert wird. Ueberhaupt wirkt nicht allein die Sonne auf die Planeten, sondern auch jeder von diesen wirkt sowohl auf die Sonne, als auf alle übrigen Haupt- und Nebenplaneten. Durch diese wechselseitige Einwirkung entstehen in den Bewegungen der Planeten kleine Aenderungen, die man Per-

turbationen nennt. Die Theorie derselben kann, ohne die Kenntniß der Infinitesimalrechnung, nicht wohl vorgetragen werden. Wir müssen daher Diejenigen, die sich näher belehren wollen, auf die ausführlichern Lehrbücher der Mechanik und vorzüglich der physischen Astronomie verweisen. Man sehe etwa: Elemente der physischen Astronomie von J. J. Littrow. Wien 1827.

Sechster Abschnitt.

Von der Bewegung auf vorgeschriebener Bahn überhaupt, und von der Schwungbewegung der Pendel insbesondere.

§. 57.

In allen bis hierhin betrachteten Fällen bestimmte sich die Natur der Bahn, welche der bewegliche Punkt oder Körper durchlief, durch die Kräfte, die auf ihn wirkten. Zuweilen indessen ist die Bahn, welche der bewegliche Punkt verfolgen muß, vorher entweder genau bestimmt, so daß die Kräfte, die auf ihn wirken, ihn durchaus nach keiner andern, als nach dieser Bahn, treiben können; oder die Bahn des beweglichen Punktes ist wenigstens durch eine gewisse Bedingung beschränkt. So kann z. B. ein in einem kreisförmig gebogenen Kanal eingeschlossener körperlicher Punkt keine andere Bahn als den Kreisbogen, nach welchem der Kanal gebogen ist, beschreiben. Hingegen kann ein an einer festen, um einen ihrer Endpunkte völlig frei beweglichen, Linie befestigter körperlicher Punkt sich zwar nicht von der Oberfläche der Kugel, welche diese Linie zum Halbmesser, und den Endpunkt derselben zum Mittelpunkt hat, entfernen, aber doch jede auf dieser Oberfläche mögliche Bahn beschreiben. — Wir wollen nun in diesem Abschnitt diese Bewegungen auf vorgeschriebenem Weg näher betrachten.

§. 58.

Einer der einfachsten hierhin gehörigen Fälle ist die Bewegung eines schweren Körpers längs einer schiefen Ebene. Man denke sich (so wie Th. I. §. 73) angenommen worden, einen Körper, (fig. 16, 17) der, wenigstens mit Einem Punkt, auf einer schiefen Ebene aufliegt. Durch den Schwerpunkt o desselben sey eine Linie og senkrecht auf die schiefe Ebene gefällt. Der Körper habe eine solche Lage auf der schiefen Ebene, daß, wegen der Festigkeit derselben, der Schwerpunkt nach der Richtung og durchaus nicht weichen kann. *) Alsdann wird der Schwerpunkt, wenn man das ganze Gewicht des Körpers vereinigt annehmen darf, nach einer mit der Länge ac der schiefen Ebene parallelen Richtung herunter zu gehen streben, und, wenn keine Kraft ihn hindert, auch wirklich nach dieser Richtung fortgehn. Dabei ist die Bewegung des ganzen Körpers, (wenn er nicht etwa durch die Reibung an der schiefen Ebene, wovon wir hier absehn, eine umdrehende Bewegung erhält), durch die Bewegung des Schwerpunkts bestimmt, so daß wir also bloß diese zu untersuchen haben. —

Aus der Statik ist bekannt, (Th. I. §. 73. 1, 2) daß die Kraft, womit der Schwerpunkt eines Körpers längs der schiefen Ebene herabzugleiten strebt, sich zu dem Gewicht desselben, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge verhält, oder, daß, wenn man das Gewicht des Körpers $= P$, den Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont $= \alpha$ setzt, die Kraft, womit der Körper längs der schiefen Ebene herabzugleiten strebt $= P . \sin . \alpha$ ist. Da diese Kraft eine absolute und ständige ist, so wird die Bewegung des Schwerpunktes längs der schiefen Ebene eine gleichförmig beschleunigte seyn, und man wird für alle Umstände seiner Bewegung die gehörigen alge-

---

*) Dieses wird, wie schon (Thl. I. §. 73) bemerkt worden, der Fall seyn, wenn entweder der Punkt g, wo das Perpendikel og die schiefe Ebene trifft, ein Punkt der Oberfläche des Körpers ist (fig. 16), oder auch sich in gerader Linie zwischen zwei Punkten e, d (fig. 17) der Oberfläche, welche auf der schiefen Ebene aufliegen, befindet.

braischen Ausdrücke finden, wenn man nur in den (Abschnitt III. §. 34) für den freien Fall gefundenen Formeln g. sin. α statt g setzt. Hieraus ergibt sich, wenn man den auf der Länge der schiefen Ebene durchlaufenen Raum $= l$, die nach der Richtung derselben erlangte Geschwindigkeit $= c$, und die dazu nöthige Zeit $= t$ setzt, 1) $l = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2$

2) $c = g \cdot \sin \alpha \cdot t$

Aus 1) folgt 3) $\sqrt{\left(\frac{2\,l}{g \cdot \sin \alpha}\right)} = t$.

Aus 2) folgt 4) $\frac{c}{g \cdot \sin \alpha} = t$.

Durch Verbindung von 3) und 4) erhält man

5) $\frac{c^2}{2\,g \sin \alpha} = l$.

6) $c = \sqrt{(2\,g \cdot \sin \alpha \cdot l)}$

Zus. 1. In der Gleichung 6) (dies. §.):

$c = \sqrt{(2\,g \cdot l \sin \alpha)}$

ist $l \cdot \sin \alpha = ab$ (fig. 16, 17) = der Höhe der schiefen Ebene. Setzt man also diese = h, so hat man

1) $c = \sqrt{(2\,g \cdot h)}$.

Diese Geschwindigkeit ist also eben groß, als diejenige, die ein Körper beim freien Fall von einer Höhe = h erhalten würde (§. 34, 7). — Ein schwerer Punkt erhält also durch den Fall längs verschiedenen schiefen Ebenen, deren Höhen gleich sind, dieselbe Geschwindigkeit.

Zus. 2. ab, bc, cd (fig. 18) seyen mehrere schiefe Ebenen, die von oben nach unten so aufeinander folgen, daß die Länge der vorhergehenden die der folgenden schneidet, (die Neigungswinkel derselben mögen in einer Ebene liegen oder nicht). Wenn nun ein schwerer Punkt längs allen diesen schiefen Ebenen von dem höchsten Punkt a bis zum tiefsten d herabfällt, so würde er dadurch dieselbe Geschwindigkeit erhalten, als ob er frei von einer Höhe og, die der Summe der Höhen aller schiefen Ebenen gleich ist, herabfiele, vorausgesetzt, daß er durch den Stoß gegen die Ecken bei b, c Nichts von seiner Geschwindigkeit verlöre. — Denkt man sich nämlich durch den höchsten

Punkt a, so wie auch durch den tiefsten d eine horizontale Linie ao, dg*) gezogen, und die Länge einer jeden dieser schiefen Ebenen bis an die erste (ao) verlängert, so erhält der schwere Punkt durch den Fall längs ab dieselbe Geschwindigkeit, als auch durch den Fall längs mb. Er kommt also, er mag die eine oder andere dieser schiefen Ebenen (ab, mb) durchlaufen haben, bei b mit derselben Geschwindigkeit an. Seine Bewegung wird also auch in beiden Fällen, wenn er bei b nichts verliert, durch den Fall längs bc in demselben Maße beschleunigt. Er hat also bei c dieselbe Geschwindigkeit, als ob er die schiefe Ebene mbc, oder beim freien Fall die Höhe mγ durchlaufen hätte. Ganz auf dieselbe Art kann man auf die noch folgenden schiefen Ebenen cd u.s.f. schließen.

Zus. 3. Der Raum, den ein Körper beim freien Fall in einer gewissen Zeit t durchläuft, ist $= \frac{1}{2} g t^2$ (§. 34. 1); der längs einer schiefen Ebene in derselben Zeit durchlaufene ist $= \frac{1}{2} g . \sin . \alpha . t^2$. Der erste verhält sich zu dem zweiten, wie $1 : \sin \alpha$. Ist nun ab (fig. 19) die Höhe einer schiefen Ebene, und man steckt auf derselben von a aus ein Stück am ab, welches ein schwerer Körper in einer gewissen Zeit beim freien Fall durchläuft, so findet man die Linie, welche er in derselben Zeit auf der schiefen Ebene durchläuft, wenn man von m ein Perpendikel mo auf die Länge ae der schiefen Ebene fällt. Das Stück ao der Länge von dem höchsten Punkt o, wo das Perpendikel eintrifft, ist nämlich alsdann die gesuchte Linie. Denn das Dreieck amo $\backsim \Delta$ aeb, (indem $<$ a gemeinschaftlich, und $< b = < o = R$). Daher 1) $am : ao = ae : ab = 1 : \sin \alpha$. — Eben so findet man nun auch für jeden auf einer schiefen Ebene durchlaufenen Raum ao denjenigen, der in derselben Zeit beim freien Fall durchlaufen wird, wenn man bei o ein Perpendikel auf die Länge ae der schiefen Ebene errichtet, und

*) Wenn die Neigungswinkel der schiefen Ebenen, folglich auch die Linien ab, bc, cd u.s.f. nicht alle in derselben Ebene liegen, so muß man durch a und d sich statt einer horizontalen Linie eine horizontale Ebene gelegt denken. Sonst bleibt Alles, wie vorhin.

dieses bis an die Höhe derselben bei m verlängert, wo dann am die gesuchte Fallhöhe ist.

Zus. 4. ogeqs (fig. 20) sey ein Kreis, dessen Ebene vertikal ist, und in demselben sey ein vertikaler Durchmesser oe gezogen. Wenn man nun von jedem Endpunkte o, e desselben noch so viele Sehnen of, og, os; eg, eq zieht, so wird ein schwerer Punkt dieselben, als schiefe Ebenen betrachtet, alle in gleicher Zeit und zwar in derselben Zeit durchlaufen, in welcher ein schwerer Punkt, oder Körper beim freien Fall den Durchmesser oe durchläuft. Zieht man nämlich von dem Endpunkt g der Sehne og, die durch den Endpunkt o des Durchmessers geht, nach dem andern Endpunkt e desselben eine gerade Linie ge, so steht diese senkrecht auf og. Daher sind nach (vor. Zus.) oe, og zwei Wege, wovon der erste beim freien Fall, und der zweite beim Fall längs der schiefen Ebene og in derselben Zeit durchlaufen wird. — Dasselbe gilt von allen andern durch o oder e gezogenen Sehnen.

§. 59.

Ein körperlicher Punkt d (fig. 21), der sich nach der Richtung de mit einer Geschwindigkeit = c bewegt, stoße bei e auf eine feste Ebene. Um nun zu finden, wie er sich nach diesem Stoße bewegt, denke man sich durch seine Richtung de eine Ebene dea senkrecht auf diejenige, wogegen er stößt, gelegt. Ist aeb die Durchschnittslinie dieser Ebenen, so ist dea der Neigungswinkel, welche die Richtung (de) des Punktes mit der Ebene macht, wogegen er stößt. Man nehme ed = c, und zerlege die Bewegung nach de in die beiden dm, ds, wovon eine auf ab senkrecht, und die andere damit parallel ist. Die erstere Bewegung (nach dm) wird durch die Festigkeit der Ebene ab völlig aufgehoben. Der zweiten aber setzt diese Festigkeit gar kein Hinderniß entgegen. Ist daher die Ebene, worauf der Punkt stößt, zwar völlig fest, aber nicht federhart,*) so geht der Punkt nach eb in der Ebene

*) D. h. so, daß sie den nach dm erhaltenen Stoß zwar zernichtet, aber nicht wiedergibt.

des Neigungswinkels dea, und zwar nach derjenigen Seite hin, wo dieser Winkel stumpf ist, mit einer Geschwindigkeit $= em$ fort. Nimmt man de als Halbmesser an, und nennt $\angle dea = \alpha$, so ist $em = de . \cos\alpha = c . \cos . \alpha$. Die Geschwindigkeit $(= c)$, die der Punkt vor dem Stoß gegen die Ebene hatte, ist also um $c - c . \cos\alpha = . c . (1 - \cos\alpha) = c . \sin . \text{vers} . \alpha$ vermindert. — Nun sey (fig. 22) $debcf$ eine gebrochene, übrigens vollkommen feste Linie, deren Theile alle in Einer Ebene liegen. Die Winkel bei e, f u. s. f. heißen der Ordnung nach α, β, u.s.f. — Wenn nun ein Punkt sich nach der Richtung des Stücks de der ersten Linie bewegt, so wird er, nachdem er bei der Winkelspitze e angestoßen, sich nach der Richtung eb des zweiten Stücks bewegen, und so nach und nach alle Theile der gebrochenen Linie durchlaufen. Setzt man nun die ursprüngliche Geschwindigkeit des Punktes $= e$, seine Geschwindigkeit nach dem Stoß gegen e, b, o u. s. f. der Ordnung nach $= c', c'', c'''$ u.s.f.; hat man

1) $c' = c . \cos\alpha$

2) $c'' = c' . \cos\beta$

u. s. f.

Die Verluste, die er an seiner Geschwindigkeit, bei e, b, o u. s. f. erleidet, sind daher der Ordnung nach $c . \sin . \text{vers} . \alpha$, $c' . \sin . \text{vers} . \beta$, $c'' \sin . \text{vers} . \gamma$ u. s. f. Also der ganze Verlust während der Bewegung durch die gebrochene Linie $= c . \sin \text{vers} . \alpha + c' \sin \text{vers} \beta + c'' \sin \text{vers} . \gamma +$. Hier ist $c > c'$, $c' > c''$ u.s.f. Daher ist der ganze Verlust an Geschwindigkeit kleiner, als $c (\sin . \text{vers} . \alpha + . \sin . \text{vers} . \beta + \ldots .)$. Also die Geschwindigkeit am Ende größer als $c - c (\sin \text{vers} . \alpha + . \sin \text{vers} . \beta + \ldots)$. — Sind die Winkel α, β u. s. f. alle gleich, und ist die Zahl derselben $= n$, so ist der Verlust an Geschwindigkeit kleiner als $c . n . \sin \text{vers} . \alpha$. Also die Geschwindigkeit am Ende größer als $c - c . n . \sin \text{vers} . \alpha$.

§. 60.

ab, eb (fig. 23) seyen zwei sich schneidende, und zu gleichen Bogen gehörige Sehnen desselben Kreises, dessen Mittelpunkt c. Alsdann ist der Winkel ebf, den die Verlängerung

der Einen mit der andern macht, dem Winkel am Mittelpunkt acb über einer der Sehnen gleich. Denn der Winkel abe, den die Sehnen ab, be untereinander machen, hat zum Maß die Hälfte des Bogens, der übrig bleibt, wenn man den Bogen abe vom ganzen Kreis abzieht. Daher hat der Winkel ebf, der den $<$ abe zu 2R ergänzt, die Hälfte des Bogens abe oder ab zum Maß, welches auch das Maß des Winkels acb ist. — Man denke sich nun einen Kreis, dessen Halbmesser $= r$ sey, in unendlich Viele, (in n) gleiche Theile getheilt, und die dazu gehörigen Sehnen gezogen. (ab, be stellen zwei zunächst auf einander folgende dieser Sehnen dar). Alsdann ist, wenn der Winkel (ebf), den eine Sehne mit der nächstfolgenden macht, α genannt, wird, $< \alpha = \frac{360^0}{n}$, welches (da $n = \alpha$), unendlich klein ist. — Stellt man sich nun diese Sehnen als feste Linien vor, nach welchen ein Punkt sich so, (wie §. 59) mit einer Geschwindigkeit c bewegt, so ist der Verlust an Geschwindigkeit, den er während seiner Bewegung durch alle Sehnen des Kreises erleidet, kleiner als $c \, . \, n \, . \sin . \text{vers} . \, \alpha$. Nun ist ferner, wie aus der Trigonometrie bekannt, $\sin . \text{vers} . \, \alpha = \frac{\sin \alpha^2}{1 + \cos \alpha}$.

Da α unendlich klein, so kann $\cos \alpha = 1$, und $\sin \alpha$ sowohl der Sehne als dem Bogen von α (beide jedoch in Theilen des Halbmessers ausgedrückt) gleich gesetzt werden. Der ganze Umfang des Kreises ist $= 2 \pi r$, also der zu dem Winkel α gehörige Bogen $= \frac{2 \pi r}{n}$, oder in Theilen des Halbmessers ausgedrückt $= \frac{2 \pi}{n}$; folglich hat man $\sin \text{vers} . \, \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha^2 = \frac{2 \pi^2}{n^2}$. Also

$$c n . \sin \text{vers} . \, \alpha = \frac{2 . c . \pi^2}{n} .$$

Daher ist der Verlust an Geschwindigkeit, den der bewegte Punkt erleidet, kleiner als $\frac{2 . c . \pi^2}{n}$. Da in diesem Bruch

alle Factoren des Zählers endliche Zahlen sind, der Nenner (n) aber $= \infty$ ist, so ist der Bruch selbst unendlich klein, oder der Verlust an Geschwindigkeit ist $= 0$. Da nun der Kreis selbst als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten anzusehn ist, so verliert ein Punkt, der nach einer Kreislinie (in einem kreisförmig gebogenen Kanal) fortzugehn gezwungen wird, dadurch nichts von seiner Geschwindigkeit. —

§. 61.

Wenn nun die Bahn, die ein beweglicher Punkt zu durchlaufen gezwungen wird, irgend eine beliebige (vom Kreis verschiedene), krumme Linie ist, ihre Theile mögen in einer Ebene liegen oder nicht, so denke man sich dieselbe in unendlich viele (in n), der Länge nach gleiche Theile getheilt, und die zugehörigen Sehnen gezogen. Alsdann sind die Winkel, welche zwei zunächst aufeinander folgende Sehnen machen, zwar nicht einander gleich, aber jeder ist unendlich klein. Nennt man diese Winkel der Ordnung nach α, β, γ u. s. f., so ist der Verlust an Geschwindigkeit, den ein Punkt, der sich in dieser krummen Linie bewegt, erleidet, kleiner, als $c\,(\text{sin. vers.}\,\alpha + \text{sin. vers.}\,\beta + \text{sin. vers.}\,\gamma + \ldots)$, wo wieder c die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Wenn nun μ der größte unter allen diesen Winkeln, so ist derselbe doch so klein, daß $n\,.\,\mu$ eine endliche Größe bleibt. Wäre nämlich $n\,.\,\mu$ eine unendliche Größe, so müßte μ selbst ein endlicher Winkel von einer bestimmten Größe seyn, welches, da μ unendlich klein, nicht seyn kann. Da nun μ der größte unter allen Winkeln α, β u. s. f., so ist der Verlust an Geschwindigkeit, den der bewegte Punkt in der krummlinigen Bahn erleidet, kleiner, als $c\,.\,n\,\text{sin. vers.}\,\mu$, oder als $\frac{1}{2}.c\,.\,n\,\text{sin.}\,\mu^2$. — Nun sey der zu dem Winkel μ gehörige Bogen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt $= p$, und zwar sey $n\,.\,p = f\,.\,\pi$, wo f eine endliche Zahl ist. Aus $n\,.\,p = f\,.\,\pi$, oder $p = \frac{f\,\pi}{n}$ folgt: $\text{sin. vers.}\,\mu = \frac{f^2\,\pi^2}{2n^2}$, also

$$c\,.\,n\,.\,\text{sin. vers.}\,\mu = \frac{c\,.\,f^2.\,\pi^2}{2n}.$$

Da der Zähler dieses Bruchs eine endliche, der Nenner aber eine unendlich große Zahl ist, so ist der Werth des Bruchs, also auch der Geschwindigkeits-Verlust = 0. — Wenn daher auf einem Punkt, der gezwungen ist, in einer krummlinigen Bahn fortzugehen, eine Kraft nach der Tangente dieser krummen Linie wirkt, so erhält der Punkt dadurch dieselbe Geschwindigkeit, als ob er sich durchaus frei bewegte.

Zus. Wenn ein Punkt in einer andern horizontalen Ebene liegt, als ein anderer, so heißt das Perpendikel von einer dieser horizontalen Ebene auf die andere die Höhe des einen Punktes über dem andern, oder auch der Höhenunterschied der beiden Punkte. Aus dem (dies. §.) Erwiesenen, und aus (§. 58. Zus. 2.) folgt, daß wenn ein schwerer Punkt längs einer stetig gekrümmten Linie von übrigens willkührlicher Beschaffenheit herabfällt, er dadurch dieselbe Geschwindigkeit erhält, als wenn er beim freien Fall einen Raum durchläuft, welche dem Höhenunterschied der Punkte, wozwischen er sich bewegt, gleich ist. — Ein schwerer Punkt, welcher längs einer krummen Linie herabfällt, erhält also, wenn nur die Höhe um welche er nach vertikaler Richtung gefallen ist, sich gleich bleibt, dieselbe Geschwindigkeit, von welcher Beschaffenheit auch immer die krumme Linie seyn mag, nach welcher er sich bewegt hat.

§. 62.

Eine mathematische, vollkommen feste Linie, die sich um einen ihrer Punkte vollkommen frei drehen kann, und woran an einem andern Punkt eine unendlich kleine schwere Masse, d. h. eine solche, deren Dimensionen nach allen Richtungen hin unendlich klein sind, befestigt ist, heißt ein einfaches oder mathematisches Pendel. Die Linie selbst wird auch wohl die Pendelstange, und der Punkt oder die Achse, um welche sie sich dreht, der Umdrehungspunkt, oder die Umdrehungsachse genannt. Sind an derselben mathematischen Linie mehrere, oder auch unendlich viele schwere Massen befestigt, oder sind auch mehrere oder auch unendlich viele mathematische Pendel un-

ter einem unveränderlichen Winkel verbunden, so heißt eine solche Verbindung ein zusammengesetztes oder physisches Pendel.

Anmerk. Die Betrachtung der Gesetze des einfachen oder mathematischen Pendels ist, wie die des einfachen Hebels, und der Maschinen überhaupt (Th. I. §. 56 u. 57.) nur ein Vereinfachungsmittel, um daraus die Gesetze des zusammengesetzten Pendels herleiten zu können. — In der Ausübung kann man sich der Idee des einfachen Pendels nähern, wenn man an einer leichten und langen Schnur einen verhältnißmäßig kleinen und schweren Körper (z. B. eine kleine bleierne Kugel an einem langen seidenen Faden) aufhängt.

§. 63.

Den Grundsätzen der Statik gemäß kann ein sich selbst überlassenes Pendel, es sey ein einfaches oder zusammengesetztes, nur dann in Ruhe seyn, wenn der Schwerpunkt seiner Masse gerade unter dem Umdrehungspunkt oder unter der Umdrehungsachse liegt. Ein einfaches Pendel, welches sich entweder um einen Punkt, oder um eine horizontale Achse, mit welcher es einen rechten Winkel macht, dreht, kann daher nur in vertikaler Lage in Ruhe seyn. o m (fig. 40.) stelle ein einfaches Pendel in einer solchen vertikalen Lage vor; o sey der Umdrehungspunkt und die unendlich kleine schwere Masse befinde sich bei m. Wenn man nun das Pendel aus der vertikalen Lage in die o a bringt, so heißt der Winkel a o m, um welchen es von der vertikalen Lage abweicht, der Elongationswinkel. — Um die Kraft zu finden, womit das Pendel aus der Lage o a nach o m zurückzukehren strebt, zerlege man das Gewicht bei a, welches nach der vertikalen Richtung a b wirkt, und dessen Größe ebenfalls durch a b vorgestellt werde, in zwei andere Kräfte a d, a c, wovon eine in die Verlängerung von a o fällt, und die andere senkrecht darauf steht. Die erste derselben (a d) wird durch die Festigkeit der Pendelstange gänzlich aufgehoben, der andere (a c) hingegen widersteht diese Stange gar nicht. Denkt man sich aus o mit o m als Halbmesser einen Kreisbogen beschrieben, so wird a c eine Tangente an denselben bei a. Der Punkt strebt also nach der Richtung der Tangente (a c) dieses Kreisbogens, und zwar mit einer Kraft fortzugehn, die sich zum Gewicht der schweren Masse bei a

verhält, wie ac : ab. Man denke sich von a auf om das Perpendikel ae gefällt. Da ab $\#$ om, so ist $<$ bad $=$ moa, also auch $<$ abc $=$ moa (indem $<$ bad $=$ abc). Daher Δ abc $\backsim$ Δ aoe, und

1) ab : ac $=$ oa : ae $=$ 1 : sin. aoe.

Setzt man das Gewicht des schweren Punktes bei a $=$ P, die Kraft nach ac $=$ V, den Elongationswinkel aom $= \alpha$, so ist

2) P : V $=$ ab : ac,

also auch 3) P : V $=$ 1 : sin. α;

also 4) V $=$ P sin. α.

Der Winkel cae, unter welchem die Tangente ac gegen die horizontale ac geneigt ist, ist ebenfalls $= \alpha$ (indem $<$ cae $+$ $+ <$ eao $=$ R, und auch $< \alpha +$ eao $=$ R, also $<$ cae $= \alpha$). Der schwere Punkt fängt also sich so an zu bewegen, als ob er sich auf der schiefen Ebene ac befände. Allein er bleibt nur Einen Augenblick auf dieser Ebene, da er wegen der Festigkeit der Linie oa den Kreisbogen am beschreiben muß. Er befindet sich daher an jedem Punkt desselben auf einer andern, und zwar minder und minder geneigten schiefen Ebene, indem der Elongationswinkel von a bis m immer abnimmt. Die Kraft, welche den bewegten Punkt beschleunigt, nimmt daher von a bis m immer ab. Dasselbe gilt daher auch für die Beschleunigung (§. 6.). Allein die Geschwindigkeit nimmt, da doch immer eine, obschon verminderte Kraft fortfährt auf den bewegten Punkt zu wirken, immer zu — (§. 25 und 26.). Vermittelst der Geschwindigkeit, die er bei m erlangt hat, beschreibt er auf der andern Seite einen dem Bogen am gleichen mf. Da nämlich, bei der Bewegung nach einer stetig gekrümmten Linie, die nach der Tangente wirkenden Kräfte einen Punkt eben so bewegen, als ob er völlig frei wäre; so steigt der Punkt eben hoch, als er gefallen, so daß mf $=$ ma. Von f fällt er nun von selbst wieder nach m zurück, von wo er vermittelst der erlangten Geschwindigkeit bis a steigt, und so diese Bewegung ins Unendliche fortsetzen würde, wenn sie nicht durch die Reibung und den Widerstand der Luft nach und nach gehemmt würde. Man nennt die Bewegung des Pendels

(von a bis f), von dem höchsten Punkt (a), von welchem es auf der Einen Seite der Vertikallinie herabfällt, bis zu dem höchsten (f), den es auf der andern Seite erreicht, eine Schwingung, oder einen Schwung (vibratio, sive oscillatio) desselben, und die Zeit, die es braucht, um einen solchen Schwung zu vollenden, seine Schwingungszeit (tempus oscillationis).

Anmerk. Statt den schweren Punkt an dem Endpunkt einer mathematischen Linie zu befestigen, könnte man auch einen Kanal nach der Krümmung eines Kreisbogens f m a aushöhlen, und ihn in demselben sich hin- und herbewegen lassen, wobei man sich indessen alle Reibung wegdenken müßte. Man könnte einem solchen Kanal die Krümmung einer jeden beliebigen krummen Linie geben, wodurch sich dem schweren Punkt eine Bewegung nach einer beliebigen krummen Linie ertheilen ließe. Dasselbe könnte man erhalten, wenn die Länge der Linie o a veränderlich wäre, wo denn der Punkt a sich bald von o entfernte, bald o näherte.

§. 64.

Wenn der Bogen des Elongationswinkels gegen den Umfang des ganzen Kreises nur klein ist, so wird die Schwingungszeit desselben Pendels von der Größe dieses Elongationswinkels unabhängig seyn, d. h. es wird dieselbe Zeit brauchen, um Einen Schwung zu machen, der Bogen des Elongationswinkels mag $= \alpha$, oder $n . \alpha$, oder auch $= \frac{1}{n} \alpha$, (wo n jede Zahl, die um noch soviel größer als 1 ist, bedeuten kann), wenn nur $n . \alpha$ gegen den Umfang sehr klein ist. — Man betrachte nämlich zwei völlig gleiche Pendel. Für das Eine sey der Elongationswinkel $= \alpha$, für das andere $= n . \alpha$, und n eine ganze Zahl. Man denke sich beide Bogen, die das eine und andere zu durchlaufen hat, in eine gleiche, und zwar in eine unendlich große Zahl (m) gleicher Theile getheilt. Alsdann verhält sich ein Theil des einen Bogens zu einem Theil des andern, wie 1 : n. Setzt man das Gewicht des schweren Punktes für das eine und andere Pendel $=$ P, so ist die Kraft, womit die Pendel im Anfang ihrer Bewegung beschleunigt werden, für das erste Pendel $= P. \sin. \alpha$, und für das

andere = P. sin. n. α. Ist aber n . α nur klein, so ist sehr nahe sin. α : sin. nα = 1 : n, d. h. das eine Pendel wird im Anfang von einer nmal so starken Kraft beschleunigt, als das andere. Da man nun annehmen kann, daß die Beschleunigung, während der Bewegung durch dasselbe Theilchen eines jeden Bogens, sich nicht ändert, so werden die Beschleunigungen beider Pendel in der Zeit, worin jedes das erste Theilchen seines Bogens durchläuft, sich wie 1 : n verhalten. Da nun die zu durchlaufenden Wege (nämlich das erste Theilchen des einen und andern Bogens) sich auch wie 1 : n verhalten, so werden beide Wege in derselben Zeit durchlaufen. Die Geschwindigkeiten beider Pendel, nachdem jedes das erste Theilchen seines Bogens durchlaufen, verhalten sich auch wie 1 : n, da zwei Kräfte, die sich eben so (wie 1 : n) verhalten, eine gleiche Zeit hindurch, Eine auf das erste, und die andere auf das zweite Pendel, gewirkt haben. Allein die beiden noch zu durchlaufenden Theile des Bogens des Elongationswinkels verhalten sich für beide Pendel auch wie 1 : n. Setzt man nämlich einen Theil des von dem ersten Pendel zu durchlaufenden Bogens = b, so ist der für das zweite Pendel gehörige Theil = n . b. Also ist das nach Durchlaufung des ersten Theilchens noch übrige Stück des Bogens für das erste Pendel = α — b, und für das zweite = n . α — n . b = n (α — b). Die Kräfte, womit also nach Durchlaufung des ersten Theils seines Bogens jedes Pendel beschleunigt wird, verhalten sich auch wie 1 : n, und dasselbe gilt, nachdem beide Pendel noch so viele, wenn nur gleichviele Theile ihres Bogens durchlaufen haben. Daher ist für jede Zeit das zweite Pendel nmal so schnell, als das erste. Jenes muß also überhaupt den nfachen Bogen in derselben Zeit durchlaufen, worin das erste den einfachen Bogen durchläuft. — Wir haben zwar das Verhältniß der von beiden Pendeln zu durchlaufenden Bogen = 1 : n angenommen, wo unter n eine Zahl verstanden wird. Wäre aber dieses Verhältniß auch = m : n, (wo m und n ganze Zahlen), so könnte man sich immer ein drittes Pendel denken, dessen Elongationswinkel sich zu dem des ersten wie 1 : m, und zu dem des zweiten wie 1 : n verhielte, wo sich dann beweisen

läßt, daß dieses dritte mit jedem der beiden ersten in derselben Zeit Eine Schwingung macht.

Anmerk. Der vorige Satz gründet sich darauf, daß die Sinus kleiner Winkel sich wie die Winkel oder Bogen verhalten. Streng genommen gilt dieses nur für unendlich kleine Bogen. In wiefern man es in der Ausübung für einen bestimmten Bogen noch als hinreichend genau ansehen kann, ergibt sich aus den trigonometrischen Tafeln.

§. 65.

Eine krumme Linie, in welcher ein schwerer Punkt immer dieselbe Zeit braucht, um bis zum tiefsten Punkte zu gelangen, wie groß man auch immer den Theil derselben nimmt, den er (von Anfang an) zu durchlaufen hat, heißt die Linie des gleichzeitigen Falls (linea isochrona). Eine jede Linie, in welcher die beschleunigende Kraft, die den fallenden Punkt an jeder Stelle seiner Bahn treibt, sich wie der noch zu durchlaufende Theil seines Wegs verhält, hat diese Eigenschaft. Gibt man nämlich einem schweren Punkt oder Körper in derselben einen Raum = s, und einem andern einen = n.s zu durchlaufen, so fängt der zweite, da die n fache Kraft auf ihn wirkt, auch sich mit der n fachen Geschwindigkeit (des ersten) an zu bewegen. Er durchläuft also in dem ersten Zeittheilchen das n fache von dem Weg des ersten, und dann verhalten sich die Reste der Wege, die der eine und andere noch zu durchlaufen hat, ebenfalls wie 1 : n. Daher verhalten sich im zweiten Zeittheilchen die beschleunigenden Kräfte, also auch die Zunahmen der Geschwindigkeiten, ebenfalls wie 1 : n. Da nun am Ende des ersten Zeittheilchens die Geschwindigkeiten sich auch wie 1 : n verhielten, so verhalten sie sich am Ende des zweiten auch wie 1 : n. Daher durchläuft auch im zweiten Zeittheilchen der zweite Punkt den n fachen Weg des zweiten u. s. f. Hieraus folgt, daß eine Cycloide, deren Ebene und Achse vertikal ist, und worin der Scheitel die tiefste Stelle einnimmt, eine solche Linie des gleichzeitigen Falls ist. Ist nämlich a b c (fig. 24.) eine solche Cycloide, und e f b der erzeugende Halbkreis, so wird ein schwerer Punkt bei o eben so beschleunigt, als ob er sich auf einer scharfen Ebene befände, welche mit

der Tangente om bei o zusammenfällt. Fällt mau nun ein Perpendikel o δ auf den Durchmesser ab, und zieht die Sehne bf, so ist diese bekanntlich parallel mit der Tangente om *). Der Winkel fbs, welchen fb mit der horizontalen bm macht, ist $= <$ feb, (indem fbs + fbδ = R, und in dem rechtwinkeligen Δ efb auch $<$ fbδ + feb = R), also $<$ fbs = feb. Nimmt man den Durchmesser eb des erzeugenden Halbkreises als Halbmesser an, so ist fb der Sinus von $<$ feb, oder von fbs. Setzt man also fbs $= \alpha$, das Gewicht des schweren Punktes = P, so ist die Kraft, mit welcher derselbe bei o nach der Tangente om fortzugehn strebt, $= P. \sin. \alpha = P. \frac{fb}{eb}$. Eben so wird die Kraft, die ihn an einem andern Punkt n treibt, $= P. \frac{gb}{eb}$; so daß die Kräfte, welche den schweren Punkt an verschiedenen Stellen seiner Bahn nach der Richtung der Tangente treiben, sich, wie die Sehnen (bf, bg) verhalten. Aber jede dieser Sehnen ist gleich der Hälfte des zugehörigen Cycloidalischen Bogens ob, nb, d. h. desjenigen, welchen der schwere Punkt bis b noch zu durchlaufen hat. Also steht die Kraft, welche auf den schweren Punkt während seiner Bewegung in der Cycloide wirkt, im geraden Verhältniß des noch zu durchlaufenden Wegs; daher ist die Cycloide eine Linie des gleichzeitigen Falls.

Zusatz. Man denke sich einen senkrechten Cylinder, worin der Umfang der Grundfläche entweder eben so groß, oder größer ist, als der Umfang egbφ (fig. 24.) des erzeugenden Kreises, oder als aec. Wenn man nun die Ebene einer Cycloide abc (fig. 24.) um die krumme Seitenfläche eines solchen Cylinders so herumlegt, daß der Durchmesser eb des

*) Die Eigenschaften der Cycloide, wovon hier Gebrauch gemacht wird, findet man in dem Anhang zu meinem Lehrbuch der Geometrie ohne Hülfe der Analysis, aus bloßen Gründen der Elementargeometrie, erwiesen.

erzeugenden Kreises vertikal bleibt, so behalten alle Theile des Umfangs der Cycloide dieselbe Neigung gegen den Horizont, die sie vorher hatten. Da nun überdem der Umfang der Cycloide auf der Oberfläche des Cylinders eine stetig gekrümmte Linie bildet, so wird dieselbe ebenfalls eine Linie des gleichzeitigen Falls seyn. Es gibt nun erstens dieser Cylinder unendlich viele, und zweitens kann man statt eines solchen Cylinders jedes senkrechte Prisma, dessen Grundfläche zum Umfang irgend eine stetig gekrümmte Linie hat, anwenden. Es gibt also unendlich viele Linien des gleichzeitigen Falls, jedoch nur Eine ebene (d. h. nur Eine, deren Theile alle in derselben Ebene liegen), und dieses ist die Cycloide.

Anmerk. Die Cycloide hat für die Mechanik noch eine andere sehr wichtige Eigenschaft. Sie ist nämlich die Linie des kürzesten Falls (linea brachystona). Wenn zwei Punkte c, r (fig. 24.) nicht in derselben Vertikallinie liegen, so könnte man glauben, die Linie, die ein schwerer Punkt verfolgen müsse, um in der kürzesten Zeit von c nach r zu kommen, sey die gerade Linie cr, indem diese die kürzeste ist. Wenn indessen der Punkt eine krumme Linie, etwa cβr (fig. 24.) durchläuft, so wird er bei c von einer stärkern Kraft beschleunigt, als im Anfangspunkt der geraden Linie cr; indem die Tangente bei c stärker gegen den Horizont geneigt ist, als die gerade cr; und dasselbe gilt für einen bestimmten Theil der Linie cβr, nämlich bis dahin, wo die Tangente parallel mit cr wird. Wegen der größern Geschwindigkeit, die der fallende Punkt hierdurch erhält, durchläuft er manche krumme Linien, wie cβr, in kürzerer Zeit, als die Sehne cr, und zwar wird er, wie die Variationsrechnung zeigt, in der kürzesten Zeit von einem Punkt (c) nach einem andern (r) gelangen, wenn er sich in einer Cycloide bewegt, deren erzeugender Halbkreis vertikal, und zwar so steht, daß der Scheitel b unten ist, und in welcher (Cycloide) der höchste Punkt des Umfangs einer (und zwar ebenfalls der höchste) der beiden Punkte c, r ist, wozwischen die Bewegung geschieht. — Es ist auch leicht einzusehen, daß es für zwei gegebene Punkte (c, r) nur eine solche Cycloide geben kann. Nämlich man muß die Entfernung ce auf der durch c laufenden Horizontallinie, und zugleich den Durchmesser eb des erzeugenden Halbkreises so wählen, daß 1) ec der halben Peripherie (eφb) und 2) φr dem Bogen φb gleich ist. Es ist aber leicht einzusehen, daß dieses nur für einen einzigen Punkt e, und eben so nur für einen einzigen Durchmesser eb möglich ist.

§. 66.

Wenn die Elongationswinkel für zwei einfache, ungleich lange Pendel gleich sind, so verhalten sich die Schwingungszeiten derselben, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. — Man denke sich jeden der Bogen, den die beiden Pendel zu durchlaufen haben, in eine gleiche, und zwar in eine unendlich große Anzahl von Theilen getheilt, und die dazu gehörigen Sehnen gezogen. Alsdann wird man die Bewegung beider Pendel als einen Fall durch die unendlich vielen aufeinander folgenden Sehnen ansehen können. Da überdem, nach der Voraussetzung, die Bogen für beide Pendel zu demselben Winkel gehören, so werden die Theile beider Bogen sich wie die Längen beider Pendel (oder wenn man diese der Ordnung nach l, λ nennt) wie $l : \lambda$ verhalten. Man denke sich, Eins der beiden Pendel (fig. 25.) habe bei seiner Bewegung den Bogen ab oder den Winkel aob durchlaufen. Seine Geschwindigkeit bei b, nach der Richtung der Tangente, ist alsdann derjenigen gleich, die ein schwerer Körper bei einem Fall durch die senkrechte Höhe $em = om - oe$ erhält. Man setze den ganzen Elongationswinkel $aoc = \alpha$, den schon durchlaufenen Theil $aob = \beta$, so ist $oe = ao . \cos. \alpha = l . \cos \alpha$, und $om = l . \cos. (\alpha - \beta)$, also $em = l . (\cos. (\alpha - \beta) - \cos. \alpha)$. Folglich die Geschwindigkeit bei b (nach §. 61. Zus.) $=$ $= \sqrt{(2g . l . (\cos. \alpha - \beta) - \cos. \alpha)}$. Für das zweite Pendel, dessen Länge $= \lambda$, findet man eben so, wenn es einen Winkel $= \beta$ durchlaufen, die Geschwindigkeit $=$ $= \sqrt{(2g . \lambda (\cos. \alpha - \beta) - \cos. \alpha)}$. Die Geschwindigkeiten beider Pendel, nachdem sie gleiche Winkel durchlaufen, oder zu dem ebenvielsten Theile des Bogens, den sie im Ganzen zu durchlaufen haben, gekommen, verhalten sich also, wie $\sqrt{l} : \sqrt{\lambda}$. Da nun während der Bewegung durch einen unendlich kleinen Theil des Bogens die Geschwindigkeit als beständig angesehen werden kann, und die Theile der Bogen beider Pendel im Verhältniß von $l : \lambda$ sind, so verhält sich die Zeit, welche das erste Pendel gebraucht, um irgend einen Theil seines Bogens zu durchlaufen, zu derjenigen, den das

zweite für den, nach gleicher Ordnung genommenen (den ebenvielsten) Theil gebraucht, wie $\frac{l}{\sqrt{l}} : \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{l} : \sqrt{\lambda}$. Da dieses nun für alle nach gleicher Ordnung genommenen Theilen beider Bogen gilt, so gilt es auch für die Summe derselben, oder für die ganzen Bogen.

Zusatz. Wenn m, μ die Zahl der Schwingungen bedeuten, welche zwei Pendel, deren Längen durch l, λ dargestellt werden, in derselben Zeit machen, so hat man, da die Zahl der Schwingungen, die in einer bestimmten Zeit Statt finden, im umgekehrten Verhältniß der Dauer Einer Schwingung stehen muß,

1) $m : \mu = \sqrt{\lambda} : \sqrt{l}$,

also 2) $m^2 : \mu^2 = \lambda : l$.

Anmerk. Ein Pendel macht in derselben Zeit um so mehrere Schwingungen, je kürzer es ist. Man sagt daher auch wohl, ein kurzes Pendel schwinge schneller, als ein langes. Dieses bezieht sich aber durchaus nur auf die Menge der Schwingungen, die beide in derselben Zeit machen, und nicht auf die wirkliche Geschwindigkeit des schweren Punktes in beiden Pendeln. In dieser letztern Hinsicht ist vielmehr das längere Pendel auch das schnellere und es ist aus dem Vorigen leicht einzusehen, daß sich die wirklichen Geschwindigkeiten von zwei Pendeln gerade wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen verhalten.

§. 67.

1) Man denke sich zwei bewegliche Punkte, die beide zu gleicher Zeit von dem Endpunkt a (fig. 26.) des Durchmessers eines Halbkreises ausgehn. Einer derselben durchlaufe den Umfang des Halbkreises mit gleichförmiger Bewegung. Der andere durchlaufe in derselben Zeit den Durchmesser ad, und zwar so, daß, während der erste Punkt die Bogen (em, ms u. s. f.) durchläuft, der zweite die Stücke des Durchmessers, welche zwischen den Perpendikeln, die man von den Endpunkten (e, m, s) eines jeden Bogens auf den Durchmesser herabfällt, (also die Stücke rq, qc u. s. f.) durchläuft. Alsdann findet man das Verhältniß der Geschwindigkeiten, die der zweite Punkt an den verschiedenen Stellen

seiner Bahn hat, auf folgende Art. Man denke sich den Umfang des Halbkreises in unendlich viele gleiche Theile (ae, em, ms u. s. f.) getheilt. Von jedem Endpunkt eines solchen Theils werde ein Perpendikel (eb, mr u. s. f. auf den Durchmesser gefällt, und zugleich eine Parallele mit dem Durchmesser (eo, mα u. s. f.) bis an das nächstfolgende Perpendikel gezogen. Der Durchmesser wird durch die Perpendikel in eine eben so große Anzahl Theile (ab, br u s. f.) getheilt, wie der Halbkreis selbst. Diese Theile des Durchmessers sind zwar unter sich ungleich, aber alle werden von dem Punkt, der sich nach ad bewegt, in gleicher Zeit durchlaufen, nämlich in derselben Zeit, in welcher derjenige Punkt, der sich im Umfang des Kreises bewegt, einen der oben angegebenen Theile oder Bogen des Halbkreises durchläuft, welche Zeit wegen der Gleichheit dieser Theile, und wegen der Gleichförmigkeit der Bewegung im Halbkreise für alle Theile ae, em u. s. f. gleich ist. Daher werden die Geschwindigkeiten, womit zwei dieser unendlich kleinen Theile (br, rq) durchlaufen werden, sich, wie diese Theile selbst, br : rq oder wie eo : mα verhalten. Da jeder Theil des Halbkreises z. B. der Bogen ms unendlich klein, so kann man denselben als eine gerade Linie, und das Dreieck mαs als ein geradliniges ansehen. Zieht man noch den Halbmesser mc, so kann man $\measuredangle$ smc = R annehmen, indem ms mit der Tangente bei m zusammenfällt. Daher ist Δ smα $\sim$ mcr, (indem $<$ smα + αmc = R, und auch $<$ rmc + αmc = R, also $<$ smα = $<$ rmc, und überdem $<\alpha$ = $<$ r = R). Daher hat man

1) $mc : mr = ms : m\alpha$,

also 2) $m\alpha = \frac{ms \cdot mr}{mc}$.

Ganz auf dieselbe Art findet man

3) $eo = \frac{em \cdot eb}{mc}$;

also 4) $eo : m\alpha = \frac{em \cdot eb}{mc} : \frac{ms \cdot mr}{mc}$.

In 4) ist $em = ms$ und $mc = mc$.
Daher 5) $eo : m\alpha = eb : mr$.
Da das Verhältniß $eo : m\alpha$ oder $br : rq$ auch das der Geschwindigkeiten des nach ad bewegten Punktes bei b und r darstellt, so verhalten sich diese Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten der Bahn ad, wie die an denselben auf dem Durchmesser errichteten Perpendikel, oder wie die Ordinaten be, rm u. s. f. Die Geschwindigkeit nimmt also von a bis zum Mittelpunkt c beständig zu, und von da bis d im nämlichen Verhältniß wieder ab. Da die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes bei e durch eb und bei m durch mr vorgestellt werden kann, so kann die Zunahme, welche sie von b bis r erhält, durch $mr - eb = mo$, und die von r bis q durch $sq - mr = s\alpha$ vorgestellt werden. Nun hat man aber wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $ms\alpha$, mcr

6) $mc : cr = ms : s\alpha$;

also 7) $s\alpha = \frac{ms \,.\, cr}{mc}$. Eben so findet man

8) $mo = \frac{em \,.\, cb}{mc}$. Also

9) $s\alpha : mo = \frac{ms \,.\, cr}{mc} : \frac{em \,.\, cb}{mc}$,

oder 10) $s\alpha : mo = cr : cb$, indem $ms = em$.
Die Zunahme, welche die Geschwindigkeit des bewegten Punktes in den verschiedenen Stellen von ad erhält, steht also im geraden Verhältniß seiner Entfernung vom Mittelpunkt.

II) Wir haben bis jetzt die Sache nur phoronomisch behandelt. Betrachtet man sie aber dynamisch (Th. I. §. 57.), so wird der erste Punkt den Halbkreis gleichförmig durchlaufen, wenn ihm bei a ein- für allemal eine Bewegung nach der Richtung der Tangente mitgetheilt worden, und er dabei entweder durch eine unveränderliche Kraft von bestimmter Größe (§. 45.) nach c getrieben, oder durch eine vollkommene feste Linie mit c verbunden ist. Allein auf den zweiten Punkt, der sich nach ad bewegt, muß, wegen der Veränderlichkeit seiner Geschwindigkeit beständig eine Kraft nach der Richtung

a d oder d a wirken, und zwar wird diese Kraft in den verschiedenen Punkten von a d im geraden Verhältniß der Beschleunigung, d. h. der Zunahme der Geschwindigkeit stehn müssen. Aus dem Vorhergehenden folgt also, daß die beschleunigenden Kräfte, welche auf den nach a d bewegten Punkt in den verschiedenen Stellen seiner Bahn wirken, sich wie die Entfernungen desselben vom Mittelpunkt verhalten müssen, und zwar so, daß, wenn der Punkt von a nach d über den Mittelpunkt c hinausgekommen, diese Kräfte negativ werden, d. h. von d nach c wirken.

III) Wir wollen nun von dem bis hierhin Erklärten eine Anwendung machen, um die Zeit zu finden, die ein schwerer Punkt braucht, um eine Cycloide (a b c (fig. 24.) von a bis c zu durchlaufen, wobei zu bemerken, daß er von a bis b dieselbe Zeit braucht, wie auch von b bis c. Man denke sich eine gerade Linie a d (fig. 26.), deren Länge der der Cycloide a b c (fig. 24.) gleich, und über derselben (a d) als Durchmesser einen Halbkreis a g d (fig. 26.) beschrieben. Denkt man sich nun noch einen beweglichen Punkt, welcher den Halbkreis a m s d mit gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit beschreibt, worin ein schwerer Punkt die Cycloide a b c (fig. 24.) durchläuft (welches immer verstattet seyn wird); und zugleich noch einen dritten beweglichen Punkt, welcher in dem Durchmesser a d, gerade so wie früher angenommen, fortrückt, so wird letzterer die nacheinander folgenden Theile dieses Durchmessers in derselben Zeit durchlaufen, worin der schwere Punkt die nach gleicher Ordnung genommenen, und den Theilen des Durchmessers gleichen Theile der Cycloide durchläuft. Wäre nämlich die Geschwindigkeit des dritten Punktes, nachdem er irgend einen Theil von a d durchlaufen, größer oder kleiner, als die des Punktes in der Cycloide, nachdem er ein an Länge gleiches Stück der letztern durchlaufen, so würde, da in beiden Fällen sich die Geschwindigkeiten von Null an nach demselben Gesetz verändern, die Geschwindigkeit des Einen auch während der ganzen Bewegung größer oder kleiner seyn müssen, als die des andern. Also könnte Einer nicht in derselben Zeit den Raum a d durchlaufen, in welcher der andere die an Länge

gleiche Cycloide a b c (fig. 24.) durchläuft. — Die Geschwindigkeit des im Halbkreis umlaufenden Punktes ist bei g (fig. 26.) so groß, als die des Punktes, der den Durchmesser a d durchläuft, bei c ist, und die Geschwindigkeit dieses letztern ist so groß, als die des Punktes in der Cycloide (fig. 24.) bei b. Diese letztere gehört aber zu der vertikalen Fallhöhe e b. Setzt man e b (d. h. den Durchmesser des erzeugenden Halbkreises der Cycloide = d), so ist die Geschwindigkeit bei b = $\sqrt{(2g.d)}$. Dieses ist also auch die des Punktes, der den Halbkreis a m d g (fig. 26.) mit gleichförmiger Bewegung durchläuft. Der Durchmesser a d dieses Halbkreises ist dem Umfang der Cycloide a b c gleich, d. h. er ist = 4 . d, also der Umfang des Halbkreises = $2\pi d$. Setzt man die Zeit, die ein beweglicher Punkt braucht, um denselben mit der eben angegebenen Geschwindigkeit $\sqrt{(2g.d)}$ zu durchlaufen = t, so ist

$$11)\ t = \frac{2\pi d}{\sqrt{(2g.d)}},$$

oder $$12)\ t = \frac{\pi\sqrt{(2d)}}{\sqrt{g}}.$$

Diese Zeit wird also ein schwerer Punkt gebrauchen, man mag ihn die ganze Cycloide oder jeden größern oder kleinern, so wie auch einen unendlich kleinen Bogen derselben durchlaufen lassen.

IV) Man denke sich nun, γ b (fig. 24.) sey ein gewöhnliches einfaches Pendel, welches im Kreis schwingt. γ sey der Umdrehungspunkt desselben, und seine Länge γ b werde durch l dargestellt. Dieselbe sey bei e in zwei gleiche Theile, e b, e γ getheilt, und eine Cycloide a b c beschrieben, wofür e b der Durchmesser des erzeugenden Halbkreises ist. Alsdann ist 2 b e (= b γ = l) der Krümmungshalbmesser der Cycloide bei b. Also fällt ein unendlich kleines Stück der Cycloide bei b mit einem unendlich kleinen Stück des Kreisbogens, der aus γ mit γ b als Halbmesser durch b beschrieben wird, zusammen. Also wird ein schwerer Punkt auch diese unendlich kleinen Bogen beider krummen Linien in derselben Zeit durchlaufen. Für die Cycloide findet man diese Zeit aus 12), wenn man nur statt d, welches den Durchmesser des erzeugenden Halb-

kreises vorstellt, $\frac{1}{2}$ l setzt. Hierdurch erhält man die Zeit (t') des Schwunges durch einen unendlich kleinen Kreisbogen für ein einfaches Pendel von der Länge l.

$$13)\ t' = \pi \sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}$$

Der so eben 13) gefundene Ausdruck stellt die Schwingungszeit um so genauer dar, je kleiner der Elongationswinkel genommen wird. — Es ist zwar schon erinnert worden, daß, wenn der Elongationswinkel nur klein ist, die Schwingungszeit von der Größe desselben fast unabhängig ist. Um indessen die Schwingungszeit auch für größere Elongationswinkel und überhaupt in allen Fällen völlig richtig zu erhalten, so nehme man an, für das Pendel oc (fig. 25.) sey aoc der Elongationswinkel. Alsdann liegt der schwere Punkt bei a um ec höher, als bei c. Setzt man ec = b, oc = l, so muß, um die Schwingungszeit völlig richtig zu erhalten, der Ausdruck 13) $\pi \sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}$ noch mit folgender Reihe:

$$14)\ 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \frac{b}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{b}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{b}{2l}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \left(\frac{b}{2l}\right)^n$$

multiplizirt werden. Setzt man den Werth dieser Reihe = f, so findet man für die Schwingungszeit (t'') eines Pendels von der Länge l

$$15)\ t'' = \pi . f \sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}.$$

Ist b, wie gewöhnlich, gegen 2l sehr klein, so wird die Reihe 14) an Werth sehr nahe = 1, oder noch Etwas genauer = $\left(1 + \frac{b}{8l}\right)$, wo noch das zweite Glied berücksichtigt ist. — Die Richtigkeit dieser Regel kann ohne Hülfe der Integralrechnung nicht wohl nachgewiesen werden. Man sehe Poisson Traité de Mecan. liv. II. No. 277. p. 412.

Zusatz. Man kann den Ausdruck (15) dieses §.) gebrauchen, um die Größe von g zu finden, wenn man die

Schwingungszeit (t'') eines Pendels von bekannter Länge kennt. Man erhält nämlich

$$1)\ g = \frac{\pi^2 . f^2 l}{t''^2}.$$

Ein Pendel, welches bei einem unendlich kleinen Elongationswinkel in Einer Sekunde eine Schwingung macht, heißt ein Secundenpendel. Für dasselbe ist in 1) $t'' = 1$, und $f = 1$. Hierdurch verwandelt sich 1) in

$$2)\ g = \pi^2 l.$$

Kennt man daher die Länge des Sekundenpendels an einem Ort der Erde, so findet man die Geschwindigkeit g, welche ein fallender Körper in Einer Secunde an demselben erhält. Durch die Beobachtung des Sekundenpendels hat man sich auch überzeugt, daß die Schwere an verschiedenen Punkten unserer Erde in etwa verschieden ist. Doch wir wollen hiervon, wie von einigen andern verwandten Gegenständen, unten (§. 84, 85) näher reden, nachdem wir zuerst gezeigt haben, wie man ein zusammengesetztes Pendel — und in der Ausübung gibt es keine andere — auf ein einfaches zurückbringen kann.

§. 68.

oc (fig. 25.) sey eine feste, unbeugsame Linie, ohne Masse und Gewicht, welche sich um einen ihrer Endpunkte (o) völlig frei drehn kann, und an deren anderem Endpunkte (c) sich eine unendlich kleine körperliche Masse (M) befindet. Wenn nun auf dieselbe irgend eine beständige und absolute Kraft, und zwar so wirkt, daß während der Umdrehung von oc um o ihre Richtung immer senkrecht auf oc bleibt, so wird die Masse M gerade so beschleunigt, als ob sie völlig frei wäre. Sie wird zwar, wegen der Festigkeit von oc einen Bogen beschreiben müssen; allein die Länge dieses Bogens wird gerade so groß seyn, als die gerade Linie, welche eine völlig freie und gleiche Masse, worauf dieselbe Kraft immer nach der nämlichen Richtung wirkte, in derselben Zeit beschrieben würde. Drückt man daher die Masse durch ihr Gewicht *) aus, oder setzt

*) Man braucht sich darum die Masse nicht nothwendig als schwer zu

man dieselbe in Gewicht = M, die auf sie einwirkende Kraft in Gewicht ausgedrückt = P, die Länge des in einer Zeit = t durchlaufenen Bogens = u, so hat man

$$1)\ u = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{P}{M} \cdot t^2.$$

Für den in Einer Secunde durchlaufenen Bogen (denselben = f gesetzt) erhält man also

$$2)\ f = \tfrac{1}{2} g \frac{P}{M}.$$

Ganz nach denselben Grundsätzen erhält man die Geschwindigkeit (a), welche die bewegte Masse am Ende einer Zeit (t) hat, nämlich

$$3)\ a = g \cdot \frac{P}{M} \cdot t.$$

Hörte nach der Zeit t die Kraft auf, in die Masse einzuwirken, so würde dieselbe mit der so eben angeführten Geschwindigkeit (a) sich in dem Kreis um (o) ohne Ende fortbewegen. Setzt man die in Einer Secunde erlangte Geschwindigkeit = a′, so erhält man aus 4) t = 1 gesetzt,

$$5)\ a' = g \cdot \frac{P}{M}.$$

Dieser Werth von a′ ist dasjenige, was man die Beschleunigung der bewegten Masse M nennt (§. 5.) d. h. es ist die Größe, um welche die Geschwindigkeit von M in jeder folgenden Secunde wächst, so wie $f. = \tfrac{1}{2} \cdot g \frac{P}{M}$ in 2) der Bogen ist, welchen die Masse M in jeder folgenden Secunde mehr beschreibt, als in der vorhergehenden. — Wir haben bis jetzt die von M durchlaufenen Bogen nur ihrer absoluten Größe nach betrachtet. Jetzt wollen wir noch das Verhältniß derselben zum Umfang, oder die Größe der Winkel am Mittel-

denken. Wenn sie z. B. im Universum schwebte, so würde man unter M das Gewicht verstehn, das sie auf der Oberfläche unserer Erde zeigen würde.

punkt, wozu sie gehören, näher untersuchen. Man setze den Halbmesser oc = r, den in einer gewissen Zeit durchlaufenen Bogen = s. Alsdann ist der dazu gehörige Winkel am Mittelpunkt (da die halbe Peripherie = π r), in Graden $= \frac{s}{\pi r} 180^0$. Dieser Winkel sey (in Graden) = α, so hat man

$$5) \frac{s}{\pi . r} . 180^0 = \alpha,$$

$$6) s = \frac{\alpha . \pi . r}{180^0}.$$

Setzt man diesen Werth von s statt u in 1), so erhält man

$$7) \alpha = \frac{90^0}{\pi . r} . g . \frac{P}{M} t^2.$$

Dieses (α) ist also der Winkel, den die Masse M in t Secunden durchläuft. In 3) bedeutet a die Geschwindigkeit, so wie sie nach t Secunden ist, oder den Raum, den die bewegte Masse alsdann in Einer Secunde durchlaufen würde, wenn ihre Bewegung eine Secunde hindurch gleichförmig bliebe. Setzt man in 3) ebenfalls den zu dem Raum a gehörigen Winkel = β, d. h. $a = \frac{\beta . \pi . r}{180}$, so erhält man

$$8) \beta = \frac{180}{\pi . r} . \frac{P}{M} . g . t.$$

Dieser Werth von β ist die Umdrehungsgeschwindigkeit oder Winkelgeschwindigkeit der bewegten Masse (§. 8.). Setzt man in 8) t = 1, und drückt den zugehörigen Werth von β in diesem Fall durch β' aus, so erhält man

$$9) \beta' = \frac{180}{\pi . r} . \frac{P}{M} . g.$$ Dieses ist es, was man die Umdrehungs- oder Winkelbeschleunigung der bewegten Masse nennt (§. 9.).

Nimmt man in 9) die Umdrehungsbeschleunigung (β') als gegeben an, so erhält man die Größe der Kraft P, welche auf die Masse M wirken muß, um ihr diese bestimmte Winkelbeschleunigung zu ertheilen. Die Rechnung gibt

$$10)\ \frac{M.\pi.r.\beta'}{180.g} = P.$$

§. 69.

Wir haben (vorig. §.) angenommen, die Kraft P wirke unmittelbar auf die Masse M, oder sie sey mit M an derselben Stelle des Pendels angebracht. Betrachten wir nun den Fall, wo die Masse M noch immer bei c (fig. 25.), aber die Kraft P an einem andern Punkt g des Pendels angebracht ist. Man kann in diesem Falle sich immer eine zweite Kraft V denken, die, wenn sie bei c angebracht würde, und auf die Masse M unmittelbar, und zwar so, wie (§. 68.) für P angenommen worden, wirkte, dem Pendel dieselbe Bewegung, wie die Kraft P bei g angebracht, ertheilte. Diese Kraft V muß so beschaffen seyn, daß, wenn man sie bei c nach einer der Richtung der Kraft P gerade entgegengesetzten Richtung anbrächte, sie mit P (bei g) im Gleichgewicht wäre. Denn eben aus diesem Gleichgewicht erkennt man, daß beide Kräfte die Masse M, in derselben Zeit um denselben Winkel, nur nach entgegengesetzter Richtung, drehen würden. Zu diesem Gleichgewicht wird aber erfordert, daß

$$1)\ og.P = oc.V;$$

also $2)\ \frac{og}{oc}.P = V = \frac{d}{r}.P$, wenn man $og = d$, und die Länge des Pendels $oc = r$ setzt. Substituirt man diesen Werth von V statt P in die Formel des (vorig. §.), so erhält man die Werthe der dort angegebenen Größen für den Fall, wo die Kraft, die auf das Pendel wirkt, an einem andern Punkte, alsdie unendlich kleine Masse selbst angebracht ist. Insonderheit erhält man aus 8) die Umdrehungsgeschwindigkeit (β), und aus 9) die Umdrehungsbeschleunigung (β') wie folgt

$$3)\ \beta = \frac{180.d}{\pi.r^2}.\frac{P}{M}.g.t.$$

$$4)\ \beta' = \frac{180.d.g}{\pi r^2}.\frac{P}{M}.$$

Aus 4) folgt

$$5)\ \frac{\pi.r^2.\beta'}{180.d.g}M = P.$$

Dieses ist die Größe der Kraft, die bei g angebracht werden muß, um der Masse M bei c eine bestimmte Umdrehungsbeschleunigung (β') zu ertheilen.

Zusatz. Wir haben (dies. §) zwar angenommen, daß der Punkt g, wo die Kraft P angebracht ist, mit c und dem Umdrehungspunkt o (fig. 25) in gerader Linie liege. Wenn die Kraft P aber auch an einem Punkt s einer andern Linie oa, die mit oc unter einem unveränderlichen Winkel aoc fest verbunden ist, wirkt, so wird doch die Bewegung des Pendels noch so erfolgen, wie vorhin erklärt worden, wenn nur os = og, und dabei die Kraft bei s, so wie für die bei g vorausgesetzt worden, eine absolute und beständige Kraft ist, deren Richtung bei der Bewegung immer auf oa senkrecht bleibt. Denn auch alsdann halten die Kräfte P bei s und V bei c sich im Gleichgewicht; folglich müssen auch beide der Masse M dieselbe Winkelbeschleunigung ertheilen.

Zusatz 2. Eben so ist leicht einzusehn, daß, wenn man ein System von mehreren verbundenen Linien hat, welches sich um eine Achse frei drehn kann, und an einem Punkte desselben eine unendlich kleine körperliche Masse, und entweder an demselben, oder auch an einem andern Punkte eine Kraft angebracht ist, man die Winkelbeschleunigung ganz nach den Regeln (dies. §.) findet, wenn nur folgende Bedingungen erfüllt werden. 1) Die Richtung der Kraft muß in einer auf der Achse senkrechten Ebene liegen. 2) wenn man von dem Punkte, wo die Kraft angebracht ist, ein Perpendikel auf die Achse fällt, so muß die Richtung der Kraft auf diesem Perpendikel senkrecht stehn. 3) Man muß in den Formeln von (§. 68 u. 69) statt der Entfernung eines Punktes von o seine Entfernung von der Achse, d.h. das von ihm auf die Achse gefällte Perpendikel in Rechnung bringen. — Wenn übrigens die Richtung der Kraft nicht in einer auf der Achse senkrechten Ebene liegt, so kann man sie, wie aus der Statik bekannt ist, allezeit in eine mit der Achse parallele und eine andere, die in einer auf der Achse senkrechten Ebene liegt, zerlegen. Die erste hat nur ein Bestreben, die Achse nach ihrer Länge zu verschieben, und fällt also, wenn die Achse unverrückbar ist, ganz weg. Um die Wirkung

der zweiten zu beurtheilen, fälle man von dem Punkt, wo sie wirkt, ein Perpendikel auf die Achse. Steht ihre Richtung nicht senkrecht auf dem Perpendikel, so kann man sie in zwei zerlegen, wovon Eine ihrer Richtung nach mit dem Perpendikel zusammenfällt, und die andere mit demselben einen rechten Winkel macht. Die erstere fällt durch die Festigkeit des Systems ganz weg, und die zweite wirkt gerade so, wie es im Vorigen für die Kraft P. angenommen worden. Nimmt man also nur auf diese zweite Kraft Rücksicht, so findet man die Umdrehungsbeschleunigung u. s. f., wenn man in den Formeln von (§. 68, 69) nur die Entfernung der verschiedenen Punkte von der Umdrehungsachse statt ihrer Entfernung von dem Umdrehungspunkt o in Rechnung bringt.

§. 70.

abc (fig. 27) stelle irgend einen Körper von endlicher Größe und Masse dar, der sich um eine durch e laufende Achse vollkommen frei drehn kann. An einem Punkte f desselben wirke eine Kraft P, deren Richtung (fs) in einer auf der Umdrehungsachse senkrechten Ebene liegt, und zugleich auf dem von f auf die Umdrehungsachse gefällten Perpendikel (fe) senkrecht steht. Die Kraft P sey eine absolute und beständige, deren Richtung dabei immer auf ef senkrecht bleibt. — Um in diesem Falle die Umdrehungsbeschleunigung zu finden, denke man sich den Körper abc in unendlich viele Stücke, deren Dimensionen alle unendlich klein sind, getheilt, und von dem Mittelpunkt eines jeden ein Perpendikel auf die Achse gefällt. Die Massen dieser Stücke werden der Ordnung nach durch Q, Q′, Q″ u. s. f., und die zugehörigen Perpendikel auf die Achse oder die Entfernungen von der Achse durch r, r′, r″ u. s. f., endlich die Linie ef durch d bezeichnet. Obschon eigentlich die Kraft P allein bei f auf den Körper wirkt, und jedem Theilchen desselben seine Umdrehungsbeschleunigung ertheilt, so wird es doch für jedes Theilchen eine Kraft geben, die unmittelbar an demselben angebracht, ihm dieselbe Umdrehungsbeschleunigung ertheilen würde, die ihm die Kraft P wirklich ertheilt. Die dazu für die verschiedenen Massentheilchen Q, Q′ Q″ u. s. f.

nöthigen Kräfte seyen der Ordnung nach V, V′ V″ u. s. f. Setzt man nun noch die wirkliche Umdrehungsbeschleunigung $= \beta'$, so erhält man, wenn man bedenkt, daß bei der Umdrehung eines festen Körpers alle Punkte desselben gleiche Winkel beschreiben, also auch dieselbe Umdrehungsbeschleunigung haben, aus (§. 68. 10.):

$$1)\ V = \frac{Q.\pi.r}{180.g}.\beta'$$

$$2)\ V' = \frac{Q'.\pi.r'}{180.g}.\beta'$$

$$3)\ V'' = \frac{Q''.\pi.r''}{180.g}\beta'$$

u. s. f.

Da nun aber die Kräfte V, V′ u. s. f., wenn sie unmittelbar an den verschiedenen Massentheilchen des Körpers angebracht werden, diesen Theilchen, folglich auch dem ganzen Körper dieselbe Umdrehungsbeschleunigung ertheilen, welche die Kraft P, bei f angebracht, ihm ertheilt, so müssen die Kräfte V, V′ u. s. f., nach einer der ihrigen entgegengesetzten Richtung angebracht, sich mit P im Gleichgewicht halten. Hierzu wird aber erfordert, daß die Summe der Momente der erstern Kräfte dem Momente von P gegen die Achse gleich sey. Hieraus folgt

$$4)\ \frac{Q.\pi.r^2}{180.g}\beta' + \frac{Q'\pi.r'^2}{180.g}.\beta' + \frac{Q''.\pi.r''^2}{180.g}.\beta' + \ldots = P.d,$$

oder $5)\ \frac{\pi.\beta'}{180.g}(Q.r^2 + Q'.r'^2 + Q''r''^2 + \ldots\ldots) = P.d.$

Auf der linken Seite in 5) ist das in Klammern eingeschlossene die Summe der Produkte, die man erhält, wenn man jedes Massentheilchen mit dem Quadrat seiner Entfernung von der Achse multiplicirt. Drückt man diese Summe dadurch aus, daß man Einem dieser Produkte den Summenbuchstaben: S vorsetzt, so erhält man

$$6)\ \beta' = \frac{180}{\pi}.g.\frac{P.d}{S(Q.r^2)}.$$

Die Größe S (Q. r²) heißt das Moment der Trägheit

(momentum inertiae) des Körpers abc gegen die gewählte Achse. Die Erforschung desselben ist für die Mechanik eben so wichtig, als die des Schwerpunktes für die Statik. Ueber die Art, wie dasselbe für jeden Körper, und für jede Achse gefunden wird, soll in den folgenden (§) näher gehandelt werden.

§. 71.

Nun sey abc (fig. 27) ein schwerer Körper, der sich um eine horizontale, durch e laufende Achse frei drehn kann, so daß er ein zusammengesetztes Pendel darstellt. f sey der Schwerpunkt desselben, und von diesem ein Perpendikel fe auf die Achse gefällt, und durch e die Vertikale ec gezogen. Da man sich, nach den Grundsätzen der Statik, das Gewicht des Körpers in seinem Schwerpunkt vereinigt denken kann, so wird der Körper von selbst nur dann in Ruhe bleiben können, wenn die Linie ef sich in vertikaler Lage befindet. Hat dieselbe eine andere geneigte Lage, wie die Figur sie darstellt, so heißt der Winkel cef, um welchen ef von der Vertikalen ec abweicht, der Elongationswinkel. Setzt man denselben $= \alpha$, $ef = d$, und das Gewicht des Körpers $= P$, so ist, gerade so wie für ein einfaches Pendel, $P . \sin \alpha$ die Kraft, welche bei f nach einer auf ef senkrechten Richtung fs wirkt, und den Körper aus der Lage ef nach ec hinzudrehen strebt. Man findet also für diese Lage des Schwerpunkts bei f die Größe der Umdrehungsbeschleunigung β', wenn man (§. 70. 6.) $P . \sin . \alpha$ statt P setzt. So erhält man

$$1)\ \beta' = \frac{180}{\pi} \cdot g \cdot \frac{d P . \sin \alpha}{S\,(Q . r^2)} \cdot$$

Man denke sich ein einfaches Pendel (fig. 25), dessen Länge $oc = l$, woran bei c eine schwere Masse M, deren Gewicht $= P$, angebracht ist. Würde dasselbe unter einem Elongationswinkel aoc, welcher dem fec $(= \alpha)$ fig. 27 gleich ist, aufgehoben, so wäre die Kraft, die bei a senkrecht auf ao wirkt $= P . \sin \alpha$. Hieraus ergibt sich die Umdrehungsbeschleunigung des einfachen Pendels in dieser Lage, welche $= \beta''$ gesetzt werde, wenn man in (§. 68. 9) $P . \sin \alpha$ statt P., $M = P$, und l statt r setzt. Also

2) $\beta'' = \frac{180}{\pi . l} . g \sin \alpha.$

Damit der 2) gefundene Werth (von β'') dem 1) gefundenen (von β') gleich sey, wird erfordert, daß

3) $\frac{180}{\pi} . g . \frac{\alpha . P . \sin \alpha}{S . (Q . r^2)} = \frac{180}{\pi . l} . g . \sin \alpha,$

oder 4) $\frac{S (Q . r^2)}{P . d} = l.$

Hat l diesen Werth, so ist für den angenommenen Elongationswinkel (α) die Umdrehungsbeschleunigung des einfachen Pendels eben groß, als die des zusammengesetzten. Allein dasselbe wird offenbar für jeden andern Elongationswinkel gelten, wenn derselbe nur für das einfache Pendel eben groß ist, als für das zusammengesetzte. Daher wird dieses letztere überhaupt seine Schwingungen in derselben Zeit vollenden, als auch das erstere. Nun ist aber nach (§. 67. IV. 13) für die Schwingungszeit (t′) eines einfachen Pendels von der Länge l, wenn der Elongationswinkel unendlich klein,

5) $t' = \pi \sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}.$

Setzt man hierin statt l den 4) gefundenen Werth, so erhält man, wenn die Schwingungszeit des zusammengesetzten Pendels T genannt wird,

6) $T = \pi \sqrt{\left(\frac{S . Q r^2}{P . d . g}\right)}.$

Ist der Elongationswinkel nicht unendlich klein, so muß man beide Werthe t′, T mit der Reihe (§. 67. IV. 14.) multipliciren.

Zusatz. In dem Ausdruck (§. 71. 4): $l = \frac{S . (Q . r^2)}{P . d}$, welcher die Länge l eines einfachen Pendels angibt, das seine Schwingungen mit dem zusammengesetzten in derselben Zeit vollendet, ist P d das Moment des Schwerpunkts, oder die Summe der Momente aller schweren Theile des Pendels gegen die Umdrehungsachse; $S . Q r^2$ das Moment der Trägheit desselben. Man findet daher die Länge des einfachen Pendels, welches mit einem zusammengesetzten gleich schnell schwingt,

wenn man das Moment der Trägheit des letztern mit dem statischen Moment desselben, beides gegen die Umdrehungsachse genommen, dividirt.

§. 72.

Wenn man von dem Schwerpunkt eines zusammengesetzten Pendels ein Perpendikel auf die Umdrehungsachse, die als horizontal vorausgesetzt wird, fällt, und auf dieses letztere von dem Punkt an, wo es die Umdrehungsachse trifft, eine Linie trägt, die so lang ist, als das einfache Pendel, welches mit dem zusammengesetzten gleich schnell schwingt; so heißt der untere Endpunkt dieser Linie der Schwingungspunkt (centrum oscillationis, centre d'oscillation) des zusammengesetzten Pendels. — Das letztere schwingt gerade so, als ob seine ganze Masse in diesem Punkt vereinigt wäre; woher denn auch der Name seinen Ursprung hat.

§. 73.

Wir wollen nun, theils einige allgemeine Regeln, theils besondere Methoden, wie in einzelnen Fällen das Moment der Trägheit gefunden werden kann, erklären. Die ganz allgemeine Auflösung der Aufgabe, das Moment der Trägheit zu finden, erfordert zwar die Hülfe der Integral-Rechnung. Man kann indessen doch auch ohne dieses Hülfsmittel schon vieles leisten. Die in meinem Lehrbuch der Buchstabenrechenkunst (Th. II. §. 74. Anmerk.) gelehrte Methode, die Summe der Potenzen zu finden, leistet dabei die wichtigsten Dienste, und vertritt in Fällen, wo die Exponenten ganze und positive Zahlen sind, die Stelle der Integralrechnung. —

Aufgabe. Das Moment der Trägheit eines Körpers, dessen Masse $= M$, ist gegen eine Achse ab (fig. 29) gegeben. Man soll dasselbe gegen eine andere Achse cs, die mit der ersten ab parallel ist, finden. — Man lege durch einen willkührlichen Punkt (a) einer der parallelen Achsen eine Ebene qad auf beide senkrecht. Die Linie asq, worin diese die Ebene der Parallelen schneidet, nehme man zur Achse X, und eine auf aq in der Ebene qad senkrechte (ad) zur Achse Y an.

Die Entfernung as beider parallelen Achsen sey = d. — Man betrachte nun ein unendlich kleines Massentheilchen des Körpers, etwa das bei o befindliche, besonders. Von o fälle man auf beide Achsen (ab, X) die Perpendikel oe, oc, und projicire o durch og auf die Ebene XY bei g. Zieht man nun noch ga, gs; so ist ga = oe, gs = oc. ga, gs sind also den Entfernungen des Punktes o von beiden Achsen gleich. Zieht man ferner gq # ad, oder senkrecht auf aq, so ist aq das x, gq das y des Punktes g, so wie auch des Punktes o. Nun ist ferner

1) $ag^2 = aq^2 + gq^2$,

2) $sg^2 = sq^2 + gq^2$.

Setzt man $ag = r$, $sg = r'$, as, oder die Entfernung beider Achsen = d, so erhält man, (da $sq = x - d$, $gq = y$)

3) $r^2 = x^2 + y^2$

4) $r'^2 = x^2 - 2dx + d^2 + y^2$.

Ist nun die Masse des unendlich kleinen körperlichen Elements bei o = m, so ist das Moment der Trägheit desselben gegen die Achse $ab = r^2.m = x^2.m + y^2.m$. Setzt man also das Moment der Trägheit des ganzen Körpers (dessen Masse = M) gegen die Achse ab = V, dasselbe gegen die Achse cs = V', so hat man

5) $V = S.(x^2.m) + S.(y^2.m)$,

oder auch 6) $V = S.((x^2 + y^2.)m)$.

7) $V' = S((x^2 + y^2)m) - 2S.(d.x.m) + S(d^2.m)$.

Hier ist in 7) das Erste Glied oder $S((x^2 + y^2)m) = V$, d.h. gleich dem Moment der Trägheit des ganzen Körpers gegen die Achse ab. Das zweite Glied oder $- 2S(d.x.m)$ kann, da d für alle Punkte des Körpers gleich ist, durch $- 2d.S(x.m)$ dargestellt werden, und aus demselben Grund ist $S(d^2.m) = d^2 S.m = d^2 M$. Hierdurch verwandelt sich 7) in

8) $V' = V + d^2.M - 2dS.(x.m)$.

Ist φ der Schwerpunkt des Körpers, der Punkt h die Projection desselben auf qad, ap seine Abscisse; so hat man, wenn ap = f gesetzt wird, nach dem, was aus der Statik bekannt ist,

9) $S.(x.m) = f.M$.

Setzt man diesen Werth von S. (x. m) in 8), so kommt

10) $V' = V + d^2 . M - 2 f . M$.

Geht die Achse ab selbst durch den Schwerpunkt, so ist $f = o$, und man erhält

11) $V' = V + d^2 . M$.

Wenn man daher das Moment der Trägheit (V) eines Körpers gegen eine, durch seinen Schwerpunkt laufende, Achse kennt, so findet man dasselbe gegen jede andere mit der ersten parallele, wenn man zu dem ersten Moment das Produkt aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung beider Achsen hinzusetzt.

Zus. Aus der so eben 11) gefundenen Formel fließen einige wichtige Folgerungen

a) Das Moment der Trägheit eines Körpers gegen jede durch den Schwerpunkt gelegte Achse ist kleiner, als das gegen irgend eine andere Achse, die mit der ersten parallel ist, indem d^2 allezeit positiv, folglich nothwendig $V < V + d^2 M$ oder kleiner als V' (§. 73. 11). Wenn man daher unter allen durch den Schwerpunkt gelegten Achsen, diejenige nimmt, wogegen das Moment der Trägheit am kleinsten ist, so ist dieses zugleich das kleinste Moment der Trägheit gegen alle möglichen Achsen, die man innerhalb oder außerhalb des Körpers annehmen kann.

b) Gegen alle parallelen Achsen, die gleichweit vom Schwerpunkt abstehn, ist das Moment der Trägheit gleich. Denkt man sich nämlich durch den Schwerpunkt eine mit demselben parallele Achse gelegt, so ist nach (§. 73. 11) für alle das Moment der Trägheit $= V + d^2 . M$.

c) Unter allen parallelen Achsen ist das Moment der Trägheit gegen diejenige am größten, die am weitesten vom Schwerpunkt entfernt ist.

§. 74.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit eines Körpers gegen irgend eine bestimmte Umdrehungsachse ist gegeben. Man soll dasselbe gegen irgend eine andere Achse von bestimmter Lage, welche die erste schneidet, finden.

Auflös. Wir werden bei der Auflösung dieser Aufgabe folgenden Satz aus der analytischen Geometrie benutzen. oa, ob, oc (fig. 32.) seyen drei sich rechtwinkelig schneidende Coordinatenachsen. o sey der Durchschnittspunkt derselben, und durch diesen zwei gerade Linien om, on gezogen. Wenn nun die Winkel, welche diese beiden Linien mit den Achsen X, Y, Z machen, für die erste Linie om der Ordnung nach α, β, γ, und für die zweite on derselben Ordnung nach α', β', γ' sind, so ist, wenn man den Winkel mon, den die beiden Linien untereinander machen, δ nennt,

$$1)\ \cos.\ \delta = \cos.\ \alpha.\ \cos.\ \alpha' + \cos.\ \beta.\ \cos.\ \beta' + \cos.\ \gamma.\ \cos.\ \gamma'.$$

Obschon der Satz aus den Lehrbüchern der analytischen Geometrie hinreichend bekannt ist, so wollen wir ihn doch zum Besten der Anfänger durch die sphärische Trigonometrie hier in der Kürze beweisen.

Wenn in einem sphärischen Dreieck die drei Seiten a, b, c sind, so hat man, wenn der der ersten gegenüberstehende Winkel A gesetzt wird (nach meinen Anfangsgründen der sphär. Trigonom. §. 56.).

$$2)\ \cos.\ A = \frac{\cos.\ a - \cos.\ b.\ \cos.\ c}{\sin.\ b.\ \sin.\ c}.$$

Hieraus ergibt sich

$$3)\ \cos.\ a = \cos.\ A\ \sin.\ b.\ \sin.\ c + \cos.\ b.\ \cos.\ c.$$

Ist Eine von den beiden Seiten (b, c), die den Winkel A einschließen, $= 90^0$, so vereinfachen sich die Formeln 2) 3) außerordentlich. Ist z. B. $b = 90^0$, so verwandelt sich 2), da nun $\cos.\ b = 0$, $\sin.\ b = 1$, in

$$4)\ \cos.\ A = \frac{\cos.\ a}{\sin.\ c}.$$

Eben so erhält man aus 2), wenn $c = 90^0$,

$$5)\ \cos.\ A = \frac{\cos.\ a}{\sin.\ b}.$$

Zieht man in der Ebene coa (fig. 32.) aus o als Mittelpunkt mit einem willkührlichen Halbmesser den Kreisbogen cbe, und verbindet c mit m und m mit e ebenfalls durch Kreisbogen

c m, m e, die aus demselben Mittelpunkt o und mit demselben Halbmesser beschrieben sind, so erhält man ein sphärisches Dreieck, worin c e = 90°, und c m das Maß des Winkels m o c, den o m mit (o c) der Achse Z macht, ist. Daher c m = γ, und eben so m e = α, indem m o a der Winkel ist, den o m mit der Achse X (o a) macht. Setzt man daher den Winkel e c m = A, so hat man

$$6)\ \cos.\ A = \frac{\cos.\ \alpha}{\sin.\ \gamma}.$$

Der Winkel m c b ergänzt e c m zu 90°. Daher ist cos. m c b = = sin. e c m = sin. A. Denkt man sich aus o als Mittelpunkt den Kreisbogen m b gezogen, so hat man in dem sphärischen Dreieck m c b, da < m o b = Bog. m b = β,

$$7)\ \sin\ A = \frac{\cos.\ \beta}{\sin.\ \gamma}.$$

Setzt man den Winkel e c n = B, so erhält man ganz auf dieselbe Art

$$8)\ \cos.\ B = \frac{\cos.\ \alpha'}{\sin.\ \gamma'},$$

$$9)\ \sin.\ B = \frac{\cos.\ \beta'}{\sin.\ \gamma'}.$$

Nun ist < m c n = e c n — e c m = B — A, und wie aus der ebenen Trigonometrie bekannt ist,

$$10)\ \cos.\ (B - A) = \cos.\ B.\ \cos.\ A + \sin.\ B.\ \sin.\ A.$$

Setzt man in 10) die schon 6), 7), 8), 9) gefundenen Werthe von sin. A, cos. A, sin. B, cos. B, so kommt

$$11)\ \cos.\ (B - A) = \frac{\cos.\ \alpha.\ \cos.\ \alpha' + \cos.\ \beta.\ \cos.\ \beta'}{\sin.\ \gamma.\ \sin.\ \gamma'}$$

In dem sphär. Dreieck m c n ist nun der Winkel m c n = B — A, und c m = γ, c n = γ' bekannt. Man findet also nach 3) für die Seite m n, welche das Maß des Winkels m o n oder = δ ist,

$$12)\ \cos.\ \delta = \cos.\ (B - A)\ \sin.\ \gamma.\ \sin.\ \gamma' + \cos.\ \gamma.\ \cos.\ \gamma',$$

d. h. wenn man statt cos. (B — A) den Werth 11 setzt,

$$13)\ \cos.\ \delta = \cos.\ \alpha\ .\ \cos.\ \alpha' + \cos.\ \beta.\ \cos.\ \beta' + \\ + \cos.\ \gamma\ .\ \cos.\ \gamma'.$$

Ist nun oa (fig. 33.) die Umdrehungsachse, wogegen das Moment der Trägheit bekannt ist, oq diejenige, wogegen es gefunden werden soll, so nehme man die erste oa als Abscissenachse (X) an, und verbinde mit derselben in dem Punkt o noch zwei andere rechtwinkelige Achsen oc, ob, (Y, Z). Nun sey ferner e ein unendlich kleines Massentheilchen des Körpers; es, sn, on seyen die Coordinaten (das z, y, x) des Punktes e. Zieht man nun noch en, so steht dieses senkrecht auf der Umdrehungsachse oa; d. h. en ist die Entfernung des Massentheilchen e von oa, also ist, wenn man seine Masse durch m ausdrückt, $en^2 . m$ das Moment der Trägheit des Massentheilchens bei e gegen die Achse oa. Nun ist aber $en^2 = ns^2 + se^2 = y^2 + z^2$; also $en^2 . m = y^2 . m + + z^2 . m$. Das Moment der Trägheit des ganzen Körpers ist der Summe alle $y^2 . m$ und $z^2 . m$, die man für jedes Theilchen des Körpers findet, gleich. Setzt man also das Moment der Trägheit des ganzen Körpers gegen die Achse ao, welches als bekannt vorausgesetzt wird, = A, so ist

14) $A = S.((y^2 + z^2)) = S.(y^2 . m) + S.(z^2 . m)$.

Da die Lage der andern Achse oq, wogegen das Moment der Trägheit gefunden werden soll, bekannt ist, so sind die Winkel (aoq, coq, boq), welche oq mit den drei Hauptachsen macht, ebenfalls als bekannt anzusehn. Dieselben seyen, der Ordnung nach, α, β, γ. Betrachtet man nun wieder dasselbe unendlich kleine Massentheilchen bei e, und denkt sich von demselben ein Perpendikel ep auf oq gefällt, so ist $ep^2 . m$ das Moment der Trägheit von dem Massentheilchen bei e gegen die Achse oq. Zieht man nach dem Anfangspunkt der Coordinaten die gerade Linie eo, und zugleich eb senkrecht auf ob, so ist, wenn man eo zum Halbmesser nimmt, ob oder das z des Punktes e der Cosinus des Winkels eob, den eo mit der Achse Z macht. Nennt man daher diesen Winkel γ', und setzt eo = D, so hat man

15) $\cos. \gamma' = \frac{z}{D}$.

Eben so erhält man, wenn man die Winkel die eo mit den Achsen Y, X macht, durch β', α' ausdrückt,

$$16)\ \cos.\beta' = \frac{y}{D},$$

$$17)\ \cos.\alpha' = \frac{x}{D}.$$

Daher erhält man aus 13) für den Winkel e o q, den die Linie e o mit der neuen Umdrehungsachse o q macht, wenn e o q = δ gesetzt wird,

$$18)\ \cos.\delta = \frac{x.\cos.\alpha + y.\cos.\beta + z.\cos.\gamma}{D},$$

$$19)\ \sin.\delta^2 = 1 - \cos.\delta^2 = (D^2 - x^2\cos.\alpha^2 - y^2\cos.\beta^2 - z^2\cos.\gamma^2 - 2xy\cos.\alpha.\cos.\beta - 2xz\cos.\alpha.\cos.\gamma - 2yz\cos.\beta.\cos.\gamma):D^2.$$

Behält man o e (D) als Halbmesser bei, so ist e p der Sinus von e o q oder von δ. Daher ist e p = D sin. δ, und $ep^2.m$ (oder das Moment der Trägheit von m gegen o q) = $D^2 \sin.\delta^2.m$. Setzt man hierin statt $\sin.\delta^2$ seinen Werth 19), und bemerkt, daß $D^2 = eo^2 = on^2 + ns^2 + sc^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so erhält man

20) das Moment der Trägheit von m gegen o q =
$$= (x^2 + y^2 + z^2 - x^2\cos.\alpha^2 - y^2\cos.\beta^2 - z^2\cos.\gamma^2 - 2xy\cos.\alpha.\cos.\beta - 2xz\cos.\alpha.\cos.\gamma - 2yz\cos.\beta.\cos.\gamma)\,m.$$

Hierdurch erhält man, wenn man bedenkt, daß $x^2 - x^2\cos.\alpha^2 = x^2(1-\cos.\alpha^2) = x^2\sin.\alpha^2$, eben so $y^2 - y^2\cos.\beta^2 = y^2\sin.\beta^2$ u. s. f., und das Moment der Trägheit des ganzen Körpers = Q setzt,

$$21)\ Q = S.(x^2.\sin.\alpha^2.m) + S.(y^2\sin.\beta^2.m) + S.(z^2\sin.\gamma^2.m) - 2S.(xy\cos.\alpha.\cos.\beta m) - 2S.(xz\cos.\alpha.\cos.\gamma.m) - 2S.(yz\cos.\beta.\cos.\gamma.m).$$

In der Folge wird bewiesen werden, daß man in jedem Punkt o eines Körpers drei sich rechtwinkelig schneidende Achsen so wählen kann, daß in 21) jede der drei letzten Summen, oder jeder drei Ausdrücke S.(xym), S.(xzm), S.(yzm) = o wird. Denkt man sich die drei Hauptachsen o a, o b, o c (fig. 33.) seyen so gewählt, so erhält man für eine andere, durch o gelegte Achse o q das Moment der Trägheit oder

22) $Q = S.(x^2.\ \sin.\ \alpha^2.m) + S.(y^2\ \sin.\beta^2\ m) +$
$+ S.(z^2.\ \sin.\ \gamma^2\ m).$

oder 23) $Q = \sin.\ \alpha^2\ S.(x^2\ m) + \sin.\ \beta^2.\ S.(y^2.\ m) +$
$+ \sin.\ \gamma^2.\ S.(z^2.\ m).$

Die drei rechtwinkeligen Achsen, welche die Eigenschaft haben, daß für sie jedes der drei letzten Glieder in 21) = o, werden die drei Hauptachsen der Umdrehung, oder auch nur die drei Hauptachsen genannt. *) Es gibt für jeden Punkt des Körpers wenigstens Ein System von solchen (mechanischen) Hauptachsen, also wenigstens drei derselben. Ist dabei das Moment der Trägheit des Körpers gegen jede dieser Hauptachsen verschieden, so gibt es für den Punkt auch nur Ein System solcher Achsen, also nur drei Hauptachsen. Kennt man das Moment der Trägheit gegen jede dieser drei Hauptachsen, so läßt sich dasselbe gegen jede andere, durch ihren Durchschnittspunkt gelegte Achse (oq) auf eine einfache Weise ausdrücken. Sind nämlich die Momente der Trägheit des Körpers gegen die Achsen oa, ob, oc, der Ordnung nach, A, B, C, so hat man

24) $S.(y^2.m) + S.(z^2.m) = A,$

25) $S.(x^2.m) + S.(z^2.m) = B,$

26) $S.(x^2.m) + S.(y^2.m) = C.$

Subtrahirt man 24) von 25), und addirt 26) zum Rest, so erhält man

27) $2.S.(x^2.m) = B + C - A;$

oder 28) $S.(x^2 m) = \frac{1}{2}(B + C - A).$

Auf eine ähnliche Art erhält man

29) $S.(y^2 m) = \frac{1}{2}(A + C - B),$

30) $S.(z^2.m) = \frac{1}{2}(A + B - C).$

Setzt man diese Werthe in 23), so erhält man

31) $Q = \frac{1}{2}(B + C - A)\ \sin.\ \alpha^2 + \frac{1}{2}(A + C - B)$
$\sin.\ \beta^2 + \frac{1}{2}(A + B - C)\ \sin.\ \gamma^2,$

---

*) Man muß sich indessen hüten, diese mechanischen Hauptachsen mit den Coordinatenachsen, die auch Hauptachsen genannt werden, zu verwechseln.

oder 32) $Q = \frac{1}{2} A (\sin.\beta^2 + \sin.\gamma^2 - \sin.\alpha^2) + + \frac{1}{2} B (\sin.\alpha^2 + \sin.\gamma^2 - \sin.\beta^2) + \frac{1}{2} C (\sin.\alpha^2 + + \sin.\beta^2 - \sin.\gamma^2)$.

Da $\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$ *), so ist

33) $\cos.\alpha^2 = 1 - \cos.\beta^2 - \cos.\gamma^2$,

34) $1 + \cos.\alpha^2 = 1 - \cos.\beta^2 + 1 - \cos.\gamma^2$,

oder da $= 1 = \sin.\alpha^2 + \cos.\alpha^2$,

35) $2.\cos.\alpha^2 + \sin.\alpha^2 = 1 - \cos.\beta^2 + 1 - \cos.\gamma^2$,

36) $2.\cos.\alpha^2 = \sin.\beta^2 + \sin.\gamma^2 - \sin\alpha^2$.

Bringt man für die Winkel β, γ dieselben Verwandelungen an, so verwandelt sich 32) in

37) $Q = A\cos.\alpha^2 + B.\cos.\beta^2 + C.\cos.\gamma^2$.

Zusatz 1. Sind die Momente der Trägheit gegen alle drei Hauptachsen einander gleich, so sind dieselben gegen alle

---

*) Daß $\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$, oder daß die Summe der Quadrate der Cosinus derjenigen Winkel, welche eine durch den Anfangspunkt gezogene Linie mit den drei Coordinaten-achsen macht, dem Quadrat des Halbmessers gleich ist, ist zwar aus der analytischen Geometrie hinreichend bekannt. Wir wollen indessen zum Besten Derjenigen, die mit den Lehren derselben nicht völlig vertraut sind, den Beweis davon in der Kürze beifügen. Man denke sich ein senkrechtes Parallelepipedon, dessen Flächen alle Rechtecke sind. Drei sich schneidende Seitenlinien desselben seyen der Ordnung nach a, b, c; die durch den Durchschnittspunkt derselben gezogene Diagonallinie des Parallelepip. sey = d. Nimmt man nun d zum Halbmesser an, so ist a der Cosinus des Winkels, den d mit a macht, oder wenn man diesen Winkel α nennt, so ist $\cos.\alpha = \frac{a}{d}$. Ganz auf dieselbe Art findet man, wenn man die Winkel, welche d mit b und c macht, der Ordnung nach β, γ nennt, $\cos.\beta = \frac{b}{d}$, $\cos.\gamma = \frac{c}{d}$. Hierdurch wird

$$\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2}.$$

Nun ist aber $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.
Hierdurch wird

$$\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = \frac{d^2}{d^2} = 1.$$

durch den Durchschnittspunkt der drei Hauptachsen gelegten Achsen sich gleich. Ist nämlich $A = B = C$, so verwandelt sich (37. dies. §.) in

1) $Q = A (\cos. \alpha^2 + \cos. \beta^2 + \cos. \gamma^2)$.

oder 2) $Q = A$; so daß Q von den Winkeln α, β, γ ganz unabhängig ist. — Sind nun die Momente gegen zwei Hauptachsen sich gleich, d. h. ist $A = B$, so erhält man

3) $Q = A (\cos. \alpha^2 + \cos \beta^2) + C \cos. \gamma^2$;

oder da $\cos. \alpha^2 + \cos. \beta^2 = 1 - \cos. \gamma^2 = \sin. \gamma^2$,

4) $Q = A \sin. \gamma^2 + C \cos. \gamma^2$.

In diesem Falle sind also die Momente der Trägheit gegen alle Achsen, die mit der dritten Hauptachse denselben Winkel (γ) machen, sich gleich. Ist $\gamma = 90^0$, also $\sin. \gamma = 1$, $\cos. \gamma = o$, so ist

5) $Q = A$; d. h. das Moment der Trägheit gegen alle Achsen, die auf der dritten Achse senkrecht stehn, ist dem Moment gegen jede der beiden andern Hauptachsen gleich.

Zusatz. 2. Das größte und kleinste unter den Momenten A, B, C ist zugleich das größte und kleinste unter allen Momenten gegen irgend eine Achse, die durch den Durchschnittspunkt der drei Hauptachsen geht. Um den Grund hiervon einzusehn, bemerke man, daß das Moment der Trägheit, da es die Summe von den Producten aus jedem Massentheilchen in das Quadrat seiner Entfernung von der Achse ist, nothwendig positiv seyn muß. Nun sey $A > B$, und auch $A > C$, so daß sowohl $A - B$, als $A - C$ eine positive Größe ist. Setzt man in (§. 74. 37.) $1 - \cos. \beta^2 - \cos. \gamma^2$ statt $\cos. \alpha^2$, so kommt

1) $Q = A - (A - B) \cos. \beta^2 - (A - C) \cos. \gamma^2$.

Da Q, $A - B$, $A - C$, $\cos. \beta^2$, $\cos. \gamma^2$ alle positiv sind, so ist nothwendig $Q < A$. — Wenn dagegen A die kleinste unter den Größen A, B, C ist, so daß $A - B$, $A - C$ beide negativ sind, so ist in 1) auch nothwendig $Q > A$.

Zusatz 3. Man denke sich durch den Punkt o (fig. 33.) noch drei andere, sich ebenfalls rechtwinkelig schneidende Achsen gelegt. Die Winkel, welche dieselben mit den drei Hauptachsen (oa, ob, oc) machen, seyen für die erste der neuen

Achsen α, β, γ; für die zweite α', β', γ'; für die dritte α'' β'' γ''. Sind nun die Momente der Trägheit gegen die neuen Achsen, der Ordnung nach, P, Q, R; so hat man

1) $P = A . \cos. \alpha^2 + B . \cos. \beta^2 + C . \cos. \gamma^2$,

2) $Q = A . \cos. \alpha'^2 + B . \cos. \beta'^2 + C . \cos. \gamma'^2$,

3) $R = A . \cos. \alpha''^2 + B . \cos. \beta''^2 + C . \cos. \gamma''^2$.

Hier sind α, α', α'' die Winkel, welche die Achse oa (X) mit jeder der drei neuen Achsen macht, daher ist $\cos. \alpha^2 + \cos. \alpha'^2 + \cos. \alpha''^2 = 1$. Da nun für die andern Winkel dasselbe in Beziehung auf die Achsen ob, oc (Y, Z) gilt, so erhält man, wenn man 1) 2) und 3) addirt,

4) $P + Q + R = A + B + C$.

Da die Winkel α, α', α''; β, β' u. s. f. durchaus willkührlich angenommen und keiner andern Bedingung unterworfen sind, als daß die neuen Achsen sich ebenfalls rechtwinkelig schneiden, so folgt daraus der merkwürdige Satz: Wenn man durch irgend einen Punkt eines Körpers drei sich rechtwinkelig schneidende Achsen zieht, so ist die Summe der Momente der Trägheit des Körpers gegen diese drei Achsen so groß, als gegen jede andere drei Achsen, die sich in demselben Punkt des Körpers rechtwinkelig schneiden.

§. 75.

Obschon es für jeden willkührlichen Punkt des Körpers drei Hauptachsen gibt, so ist doch, sowohl um das Moment der Trägheit des Körpers gegen jede beliebige Achse zu finden, als auch aus andern Gründen, die in der Folge näher erläutert werden sollen, die Kenntniß derjenigen am wichtigsten, die durch den Schwerpunkt gehn. Soll man nämlich das Moment der Trägheit gegen irgend eine durch einen andern Punkt des Körpers gelegte Achse finden, so denkt man sich durch den Schwerpunkt eine mit derselben parallele Achse gelegt. Aus den Winkeln, welche diese mit denjenigen drei Hauptachsen, die sich im Schwerpunkt schneiden, macht, berechnet man das Moment der Trägheit gegen dieselbe (die mit der gegebenen Achse parallele) nach (vorig. §. 37.); ferner daraus und aus dem Abstand er beiden parallelen Achsen nach (§. 73.) das

Moment der Trägheit gegen die erste Achse, wogegen es eigentlich gesucht wird. —

Das (vorig. §.) Erklärte gründet sich wesentlich darauf, daß man durch jeden Punkt eines Körpers drei sich rechtwinkelig schneidende Achsen legen kann, wofür 1) S. (x y. m) = o, 2) S. (x z. m) = o, 3) S. (y z. m) = o. Der allgemeine Beweis davon wird zwar erst im Folgenden gegeben werden. Allein auch schon hier kann man sich merken, daß es oft sehr leicht ist, zu beweisen, daß für ein gewisses Achsensystem diese Eigenschaft Statt findet. Denkt man sich z. B. die Fläche einer Ellipse a b c d (fig. 34.), und über diese eine unendlich dünne Masse gleichförmig vertheilt, so wird die genannte Eigenschaft für die große und kleine Achse a c, b d, so wie für eine im Mittelpunkt auf die Fläche der Ellipse senkrechte o e offenbar Statt finden. Nimmt man nämlich o e als Achse Z, a c als X, b d als Y, und o zum Anfangspunkt an, so ist, da für alle Punkte der elliptischen Fläche z = o, auch S. (x. z. m) = o, S. (y. z. m) = o. Was noch S. (x. y. m) betrifft, so ist leicht einzusehn, daß es für jedes positive x. y. m ein völlig gleiches negatives gibt, und umgekehrt. Betrachtet man z. B. ein unendlich kleines Theilchen der Fläche bei g, so gehört dazu auf der andern Seite der großen Achse ein gleiches und von der Achse eben weit entferntes Theilchen bei h. Die beiden Punkte g, h haben dasselbe x (dieses ist nämlich für beide o n), allein ein zwar auch gleiches, aber entgegengesetztes y (nämlich n g für g und n h für h). Die Summe der beiden x. y. m für die Flächentheilchen bei g und h ist also = o, und dasselbe gilt für jedes andere Theilchen. Daher ist offenbar auch S. (x y. m) = o. — Durch ähnliche Betrachtungen wird man sich leicht überzeugen, daß für ein Ellipsoid die drei Hauptdurchmesser auch Hauptachsen sind, welche die verlangte Eigenschaft haben, daß S. (x. y. m) = o u. s. f. Wir wollen, nachdem dieses im Allgemeinen vorausgeschickt worden, nun zur Erforschung des Moments der Trägheit von einzelnen Körpern übergehn.

§. 76.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit eines senkrechten Parallelepiped. gfcdqhp (fig. 30.), dessen Höhe qr unendlich klein ist, und dessen Seitenflächen alle Rechtecke sind, gegen eine Achse st zu finden, die in der Ebene einer durch die unendlich kleine Höhe gelegten Seitenflächen (fgpr) liegt, und mit der größten Seitenlinie (fg) derselben parallel ist. —

Auflös. Die unendlich kleine Höhe (fp) sey $= a$, die Seite fg, womit die Achse parallel ist, $= b$; die dritte Seitenlinie $fc = d$, die Entfernung der Achse ts von gf oder $fs = h$. Man denke sich fc in unendlich viele (m) gleiche Theile $f\mu$, $\mu\alpha$ u. s. f. getheilt. Jeder dieser Theile $\left(= \frac{d}{m}\right)$ werde $= l$ gesetzt. Werden nun durch die Theilungspunkte μ, α u. s. f. Ebenen parallel mit der Seitenfläche fprg gelegt, so wird das Parallelepipedon in unendlich viele (m) kleinere und untereinander gleiche getheilt, worin zwei sich rechtwinkelig schneidende Seitenlinien (wie fp, $f\mu$, und zwar diejenigen, die nicht mit der Achse st parallel), unendlich klein sind. Da fg, μm u. s. f. mit der Achse parallel, und fp, μo u. s. f. unendlich klein sind, so kann man alle Punkte Eines der durch die so eben erwähnte Theilung erhaltenen Parallelepiped. als von der Achse (st) gleichweit entfernt halten, und zwar ist diese Entfernung für die nacheinander folgenden Parallelepiped., der Ordnung nach, $s\mu$, $s\alpha$, $s\beta$ u. s. f. Nun ist aber in den rechtwinkeligen Dreiecken $sf\mu$, $sf\alpha$ u. s. f.

1) $s\mu^2 = sf^2 + f\mu^2$; $s\alpha^2 = sf^2 + f\alpha^2$;

oder, da $f\mu = \frac{fc}{m} = \frac{d}{m} = l$, $f\alpha = 2 . f\mu =$
$= 2 . l$, $f\beta = 3 . f\mu = 3 . l$ u. s. f., so ist

2) $s\mu^2 = h^2 + l^2$, $s\alpha^2 = h^2 + 2^2 . l^2$, $s\beta^2 =$
$= h^2 + 3^2 . l^2$, endlich $sc^2 = h^2 + m^2 l^2$.

Der körperliche Raum eines jeden Parallelepip. ist $= gf . fp . f\mu =$ $= b . a . l$. Ist nun die Dichtigkeit der Materie, woraus das ganze Parallelep. besteht so, daß Eine Maßeinheit desselben

q Pfund wägt, so wird die Masse jedes der kleinern Parallelepip. durch $b.a.l.q$ dargestellt. Multiplicirt man die Masse eines jeden mit dem Quadrat seiner Entfernung von der Achse, so erhält man sein Moment der Trägheit. Hierdurch ergibt sich der Ordnung nach

	Moment der Trägheit
Für das 1te Parallelep. — —	$(h^2 + l^2)\, b.a.l.q,$
„ „ 2te „ „ — —	$(h^2 + 2^2.l^2)\, b.a.l.q,$
„ „ 3te „ „ — —	$(h^2 + 3^2.l^2)\, b.a.l.q,$
— —	— — —
„ „ mte „ „ — —	$(h^2 + m^2.l^2)\, b.a.l.q.$

Setzt man $b.a.l.q = P$, so erhält man für die Summe aller dieser Momente der Trägheit, oder für das Moment des ganzen Körpers, dieses $= V$ gesetzt,

$$3)\ V = m.h^2.P + (1 + 4 + 9 \ldots + m^2)\, P.$$

Die Summe der Reihe $(1 + 4 + 9 + \ldots + m^2)$, oder der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis m, wo $m = \infty$, ist nach meiner Buchstabenrechenk. (Th. II. §. 74. Anmerk. S. 157) $= \frac{m^3}{3}$. Hierdurch erhält man

$$4)\ V = \left(m.h^2 + \frac{m^3.l^2}{3}\right).\ P = \left(m.h^2 + \frac{m^3 l^2}{3}\right) b.a.l.q =$$

$$= \left(m h^2 b.a.l + \frac{m^3\, l^3\, b\, a}{3}\right) q.$$

Da $l = \frac{d}{m}$, also $m.l = d$, so wird aus 4)

$$5)\ V = \left(h^2.b\,a\,d + \frac{d^3.b.a}{3}\right) q, \text{ oder}$$

$$6)\ V = \left(h^2 + \frac{d^2}{3}\right) b.a.d.q.$$

In 6) ist $b.a.d$ der Inhalt, also $b.a.d.q$ das Gewicht des ganzen Parallelepip. f g h q. Setzt man also dieses Gewicht $= N$, so erhält man

$$7)\ V = \left(h^2 + \frac{d^2}{3}\right).\ N.$$

Man erhält also das Moment der Trägheit des gegebenen Körpers, wenn man sein Gewicht mit $\left(h^2 + \frac{d^2}{3}\right)$ multiplicirt; wo d diejenige Seite (fc) bedeutet, die nicht mit der Achse (st) parallel ist.

Zusatz 1. Im Vorigen ist zwar angenommen worden, daß cfgd ein Rechteck sey. Wenn dieses aber auch nicht ist, so läßt sich, wenn nur $f\mu$ senkrecht auf gfcd steht, das Moment der Trägheit gegen die Achse ts aus dem Vorigen leicht herleiten. Denkt man sich nämlich von einem Punkt ε einer Seitenlinie μm eines der kleinern Parallelepip. ein Perpendikel $\varepsilon\delta$ auf gf, und von δ noch ein Perpendikel δx auf die Achse ts gefällt, so ist $x\varepsilon$ der Abstand des Punktes ε von der Achse. Zieht man noch $\delta\gamma \# f\mu$, so ist

1) $\delta\varepsilon = \delta\gamma \,.\, \sin.\, \delta\gamma\varepsilon = f\mu \,.\, \sin.\, \delta\gamma\varepsilon = l \,.\, \sin.\, \alpha$; wenn man nämlich den Winkel $\delta\gamma\varepsilon = f\mu\gamma = fcd$ durch α ausdrückt. Hierdurch wird

2) $x\varepsilon^2 = x\delta^2 + \delta\varepsilon^2 = h^2 + l^2 . \sin.\, \alpha^2$.

Nun ist leicht einzusehn, daß für alle Punkte desselben kleinern Parallelep. die Entfernung von der Achse sich gleich bleibt, so wie auch, daß man für die nacheinander folgenden Parallelep. das Quadrat ihrer Entfernung von der Achse findet, wenn man in die Ausdrücke (No. 2. des letzten §.) $l^2 . \sin.\, \alpha^2$ statt l^2 setzt. Eben so ist jede der Flächen μfgm, $\mu fn\alpha$ u. s. f. nun nicht mehr $= b . l$, sondern $= b . l . \sin.\, \alpha$, also auch der Inhalt eines der kleinern Parallelep. $= a . b . l . \sin.\, \alpha$, und das Gewicht eines jeden $= a . b . l . \sin.\, \alpha . q$. Hierdurch findet man, wenn man $a . b . l . \sin.\, \alpha . q = P'$, und das Moment der Trägheit des ganzen Körpers $= V'$ setzt, nach gehöriger Rechnung

3) $V' = \left(m . h^2 + \frac{m^3 . l^2 . \sin.\, \alpha^2}{3}\right) P'$.

oder 4) $V' = \left(h^2 + \frac{m^2 l^2 . \sin.\, \alpha^2}{3}\right) m . P'$.

Hier ist $m . l = fc = d$, $m . P'$ das Gewicht des ganzen Körpers. Setzt man also dieses Gewicht $= N'$, so kommt

$$5)\ V' = \left(h^2 + \frac{d^2 \sin. \alpha^2}{3}\right) N'.$$

Zusatz. 2. Ist das Parallelepip. kein senkrechtes, so denke man sich durch irgend einen Punkt ε einer der parallelen Seitenlinien μ m, α n u. s. f. eine Ebene senkrecht auf fg, also auch auf ts gelegt. Dieselbe schneide die Ebene cfgd in $\varepsilon\delta$, und die Ebene der Parallelen ts, gf, (welche nur eine Erweiterung der Ebene der Seitenfläche fgrp ist), in xδ. Ist nun das Parallelepip. kein senkrechtes, so ist der Winkel x$\delta\varepsilon$ kein Rechter, sondern er ergänzt den Winkel, unter welchem die Grundfläche cfgd gegen die Seitenfläche fgrp geneigt ist, zu 2 R. Setzt man also diesen letztern Winkel $= \beta$, $< x\delta\varepsilon = \gamma$, so ist $\gamma = 180^0 - \beta$. Nun ist

$$1)\ x\varepsilon^2 = x\delta^2 + \delta\varepsilon^2 - 2 . x\delta . \delta\varepsilon . \cos. \gamma.\text{*)}$$

Hier ist xδ das Perpendikel zwischen ts und gf, also dasselbe, was wir bis hierhin immer h genannt haben, $\delta\varepsilon = = \delta\gamma . \sin. \alpha = 1 . \sin. \alpha$ (Zus. 1.). Hierdurch verwandeln sich die Ausdrücke (No. 2. des letzt. §.), welche die Quadrate der Entfernungen der kleinern Parallelepip. von der Achse ts darstellen, der Ordnung nach in:

$(h^2 + l^2 \sin. \alpha^2 - 2 h l . \sin. \alpha \cos. \gamma)$; $(h^2 + 4 l^2 \sin. \alpha^2 - - 2 . 2 h l . \sin. \alpha \cos. \gamma)$; $(h^2 + 9 l^2 \sin. \alpha^2 - - 2 . 3 h l . \sin. \alpha \cos. \gamma)$ u. s. f.

Der körperliche Inhalt eines jeden der kleinern Parallelepip. bleibt $= a . b . l . \sin. \alpha$, und sein Gewicht $(P') = a . b . l . q . \sin. \alpha$, wo indessen unter a nicht die Seitenlinie fp, sondern die senkrechte Höhe verstanden werden muß. Hieraus ist offenbar, daß, um das Moment der Trägheit für den gegenwärtigen Fall zu finden, zu dem (vorig. Zus. No. 5.) gefundenen Ausdruck noch die Summe aller folgenden Ausdrücke:

$$\left\{\begin{array}{l} - 2 h . l . \sin. \alpha \cos. \gamma \\ - 2 . 2 h l . \sin. \alpha \cos. \gamma \\ - 2 . 3 h l . \sin. \alpha \cos. \gamma \\ - - - - - \\ - - - - - \\ - 2 . m h l . \sin. \alpha \cos. \gamma \end{array}\right\} P'$$

*) Lehrb. der Geomet. §. 300.

hinzugesetzt werden muß. Diese Summe ist

$= - 2hl.\sin.\alpha\cos.\gamma.P'(1+2+3+\ldots+m). =$

$= - 2h.l.\sin.\alpha\cos.\gamma.P'.\frac{m^2}{2} = -h.m.l.mP'\sin\alpha\cos.\gamma.$

Da $m.l = d$, und $m.P' = N'$, (wo N' das Gewicht des ganzen Körpers bedeutet) ferner $\cos.\gamma = -\cos.\beta$, so wird der eben angeführte Ausdruck $= + h\,d\,N'.\sin.\alpha\cos.\beta$. Also, das gesuchte Moment der Trägheit $= V'$ gesetzt,

$$2)\ V' = \left(h^2 + \frac{d^2\sin.\alpha^2}{3} + h\,d\sin.\alpha\cos.\beta\right)N'.$$

Setzt man hierin $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, so erhält man wieder den Ausdruck von V (No. 9. des letzt. §.).

§. 77.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit eines Parallelepip. (fig. 31.) gegen eine seiner Seitenlinien ab als Achse zu finden. —

Auflös. Es sey $bd = d$, $bm = c$, $< dba = \alpha$, der Winkel der Flächen dba, $abm = \beta$, $< anm = \delta$, das Gewicht des ganzen Körpers $= N$. Man denke sich von einem willkührlichen Punkt a der Achse ab auf die mit ihr parallele Seite nm ein Perpendikel am gefällt. Dieses sey $= f$. Man denke sich ferner an in unendlich viele (m) gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspunkte Ebenen parallel mit der Grundfläche gelegt. Hierdurch wird das ganze Parallelepip. in unendlich viele kleinere, wovon jedes ein Gewicht $= \frac{N}{m}$ hat, und eben so die Linie $am = f$ in unendlich viele gleiche Theile, wovon jeder $= \frac{f}{m}$, getheilt. Man setze $\frac{f}{m} = g$. Alsdann ist für die verschiedenen kleinern Parallelepip. das Perpendikel zwischen der Achse ab und der mit derselben parallelen Seitenlinie, oder das, was wir (vor. §.) h genannt haben, der Ordnung nach g, $2g$, $3g \ldots mg$. Für dasjenige Parallelepip, wofür dieses Perpendikel $= p.g$,

wo p irgend eine ganze Zahl, die $< m$, ist daher nach (vorig. §. Zus. 2.) das Moment der Trägheit

$= \left(p^2 g^2 + \frac{d^2 \sin. \alpha^2}{3} + p.g.d \sin. \alpha \cos. \beta\right) \frac{N}{m}$. Um das Moment der Trägheit des ganzen Körpers zu finden, muß man dem Buchstaben p alle ganzen Werthe von 1 bis m geben, und die Summe aller sich dadurch ergebenden Werthe des vorigen Ausdrucks suchen.

Für das erste Glied $(p^2 g^2) \frac{N}{m}$ wird diese Summe $=$ $\frac{m^3 g^2}{3} \cdot \frac{N}{m} = \frac{m^2 g^2}{3} . N$, oder (da $m.g = f$), $=$ $\frac{f^2 N}{3}$. Für das zweite Glied $\left(\frac{d^2 . \sin \alpha^2}{3}\right) \frac{N}{m}$ wird die Summe $= \frac{m . d^2 \sin \alpha^2}{3} \frac{N}{m} = \frac{d^2 . \sin \alpha^2}{3} . N$. Für das dritte Glied $(p\, g.d. \sin \alpha \cos \beta) \frac{N}{m}$ wird diese Summe $= \left(\frac{m^2.g.d. \sin \alpha \cos \beta}{2}\right) \frac{N}{m} = \frac{m.g.d. \sin \alpha \cos \beta . N}{2}$, oder (da $m.g = f$), $= \frac{f d \sin \alpha \cos \beta . N}{2}$. Nimmt man an (fig. 31) zum Halbmesser an, so ist $am = an . \sin . anm$, d. h. $f = c . \sin \delta$. Setzt man dieses statt f in die so eben angeführten drei Summen, und addirt dieselben, so hat man, wenn man das gesuchte Moment der Trägheit $= V$ setzt,

1) $V = \left(\frac{c^2 \sin \delta^2}{3} + \frac{d^2 \sin \alpha^2}{3} + \frac{f . c \sin \alpha \sin \delta \cos \beta}{2}\right) N.$

Setzt man hierin $\delta = \alpha = \beta = 90^0$, und nennt das Moment für diesen Fall V′, so hat man

2) $V' = \left(\frac{c^2 + d^2}{3}\right) . N$

Dieses ist also das Moment der Trägheit eines senkrechten Parallelpip., wovon alle Seitenflächen Rechtecke sind, gegen eine Seitenlinie, und zwar gegen diejenige, die unter c, d nicht enthalten, auch mit denselben nicht parallel ist.

Zus. 1. Wenn b d gegen b m (d gegen c) unendlich klein ist, so stellt der letzte Ausdruck (§. 77. No. 2) das Moment der Trägheit jedes senkrechten Prisma gegen jede durch irgend einen Punkt seiner Grundfläche und in derselben gezogene Linie als Achse dar, wo man nur statt N das jedesmalige Gewicht des Prisma setzen muß. Man findet auf diese Weise das Moment der Trägheit eines senkrechten Cylinders, dessen Gewicht $= N$, und Höhe $= c$, unter der Voraussetzung, daß sein Durchmesser unendlich klein, $= \frac{c^3 . N}{3}$.

§. 78.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit eines senkrechten Parallelepip., dessen Seitenflächen alle Rechtecke sind, gegen eine Achse zu finden, die durch seinen Schwerpunkt geht, und mit einer Seitenlinie parallel ist.

Auflös. Denkt man sich durch die Achse eine Ebene parallel mit jeder der Seitenflächen, womit die Achse parallel ist, gelegt, so wird dadurch das Parallelep. in 4 durchaus gleiche getheilt, wovon jedes in dem (vorig. §.) betrachteten Falle ist. Sind die beiden mit der Achse nicht parallelen Seiten c, d; so sind dieselben Seiten für jedes der beiden kleinern Parallelepip. $\frac{c}{2}$, $\frac{d}{2}$. Ist nun noch das Gewicht des ganzen Parallelepip. $= P$, also das eines jeden kleinern $= \frac{P}{4}$, so wird aus (vorig. §. No. 2.) das Moment der Trägheit eines jeden Theils $= \left(\frac{c^2 + d^2}{12}\right)\frac{P}{4}$; also das des Ganzen, oder

$$1)\ V = \left(\frac{c^2 + d^2}{12}\right). P.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die hier angenommene Achse eine Hauptachse (§. 74.) ist, und daß dieses letztere für die beiden andern Achsen, die durch den Schwerpunkt mit den andern Seitenlinien des Parallelepip. parallel gezogen werden, ebenfalls gilt. Nennt man daher die dritte Seitenlinie des

Parallelep. a, und die Momente der Trägheit desselben gegen die Hauptachsen, die durch den Schwerpunkt gehen, A, B, C, so hat man

$$2)\ A = \left(\frac{c^2 + d^2}{12}\right) P.$$

$$3)\ B = \left(\frac{a^2 + d^2}{12}\right) P.$$

$$4)\ C = \frac{a^2 + c^2}{12} . P.$$

§. 79.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit von der Fläche eines Kreises, worüber eine unendlich dünne Masse gleichförmig verbreitet ist, gegen eine durch seinen Mittelpunkt auf seine Fläche senkrecht gezogene Linie als Achse zu finden.

Auflös. Der Halbmesser des Kreises sey $= r$, sein Gewicht $= P$. Man denke sich r in unendlich viele (m) gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspunkte lauter konzentrische Kreise gezogen. Alsdann sind die Halbmesser dieser Kreise, vom Mittelpunkt an gerechnet, der Ordnung nach $\frac{r}{m}$, $\frac{2r}{m}$ u. s. f., oder wenn man $\frac{r}{m} = f$ setzt, f, $2f$, $3f \ldots mf$. Die ringförmige Fläche, die zwischen dem n und $(n-1)$ten dieser Kreise enthalten ist, ist $= 2.\pi\, nf.f$, oder auch $= 2\pi\,(n-1)\,f.f$, welche beide Ausdrücke, da n unendlich groß ist, als gleich anzusehen sind. Da die Fläche des ganzen Kreises $= \pi r^2$, und sein Gewicht $= P$, so ist das Gewicht des eben gedachten Ringes $= \frac{2\pi nf.f}{\pi r^2} . P = \frac{2nf^2}{r^2} . P$. Da alle Punkte desselben Ringes vom Mittelpunkt gleich weit, und zwar die des $n$ten Ringes um $n.f$ entfernt sind, so erhält man das Moment der Trägheit des $n$ten Ringes, wenn man sein Gewicht mit $n^2 f^2$ multiplicirt. Dieses Moment wird also $= \frac{2n^3 f^4}{r^2} . P$. Um das Mo-

ment der Trägheit (V) des ganzes Kreises zu finden, muß man in dem so eben gefundenen Ausdruck dem Buchstaben n alle Werthe von 1 bis m geben, und die Summe aller sich so ergebenden Werthe desselben nehmen. Hierdurch erhält man

$$1)\ V = \frac{2f^4}{r^2} P\,(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + m^3).$$

Der eingeklammerte Factor ist nach (Buchstabenrech. Th. II. §. 74. Anmerk.) $= \frac{m^4}{4}$. Also

$$2)\ V = \frac{2f^4\,m^4}{4r^2}.P.$$

Setzt man r statt m.f, so erhält man endlich

$$3)\ V = \frac{r^2}{2}.P.$$

§. 80.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit (V) eines senkrechten Cylinders gegen seine geometr. Achse als Umdrehungsachse zu finden.

Auflös. Es ist aus (vorig. §.) leicht einzusehen, daß man das Moment der Trägheit des Cylinders in diesem Falle gerade wie das des Kreises im (vorig. §.) findet, wenn man nur das Gewicht des Cylinders statt des Gewichts des Kreises setzt. Ist also das Gewicht des Cylinders $= P'$, der Halbmesser seiner Grundfläche $= r$, so ist

$$1)\ V = \frac{r^2.P'}{2}.$$

§. 81.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit eines Ellipsoids gegen seine geometrische Achse *) als Umdrehungsachse zu finden.

Auflös. abc (fig. 34.) sey die halbe Ellipse, ao ihre halbe große, ob ihre halbe kleine Achse. Man betrachte das Ellipsoid, welches durch Umdrehung dieser Ellipse um ihre

---

*) Die geometr. Achse heißt diejenige, um welche sich die halbe Ellipse, durch deren Umdrehung das Ellipsoid entstanden, herumgedreht hat.

große Achse entsteht, und suche das Moment der Trägheit gegen diese. — Das Ellipsoid wird durch eine im Mittelpunkt o auf die große Achse senkrechte Ebene in zwei völlig gleiche Hälften getheilt. Man braucht daher nur das Moment der Trägheit Einer dieser Hälften zu suchen, und dasselbe zu verdoppeln. Zu dem Ende denke man sich die halbe große Achse o a in unendlich viele (m) gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspunkte die zugehörigen Ordinaten gezogen. Ist die halbe große Achse $= a$, und man setzt $\frac{a}{m} = f$, so werden die Abscissen dieser verschiedenen Ordinaten, der Ordnung nach, f, $2f$, $3f \ldots mf$. Bei der Umdrehung der halben Ellipse um a o beschreiben diese Ordinaten parallele Kreise, und das zwischen zwei zunächst aufeinander folgenden Parallelkreisen enthaltene Stück des Ellipsoids kann als ein Cylinder angesehen werden, dessen Grundfläche eine dieser Ordinaten zum Halbmesser hat. l s, p q seyen zwei solcher einander unendlich nahen Ordinaten, eine derselben l s sey $= y$, das Gewicht des unendlich kleinen Cylinders zwischen l s und $p\,q = Q$, so ist nach (vorig. §.) das Moment der Trägheit dieses Cylinders gegen die Achse $o\,a = \frac{y^2}{2} . Q$. Der Inhalt des Cylinders ist $= \pi y^2 . p\,l = \pi y^2 f$ (indem $p\,l = \frac{a}{m} = f$). Ist daher das Gewicht von einer Maß-Einheit der Materie, woraus der ganze Körper besteht, $= P$, so ist

1) $Q = \pi y^2 f . P.$

o l ist die zu l s (y) gehörige Abscisse (x). Man hat daher, wenn noch die halbe kleine Achse $n\,b = c$ gesetzt wird, aus der Gleichung für die Ellipse

2) $y^2 = \frac{c^2}{a^2} (a^2 - x^2)$.

Ist der Punkt l der $n$te Theilungspunkt, von o an gerechnet, so ist $o\,l = n . f$, d. h. $x = n . f$. Dieses statt x in 1) gesetzt, erhält man

$$3)\ y^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - n^2 f^2).$$

Hierdurch wird

$$4)\ Q = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - n^2 f^2)\,\pi f.P,$$

und das Moment der Trägheit des Cylinders, oder

$$5)\ \frac{y^2.Q}{2} = \frac{c^4}{2a^4}(a^2 - n^2 f^2)^2\,\pi f.P,$$

oder $6)\ \frac{y^2 Q}{2} = \frac{\pi c^4}{2a^4} f.P(a^4 - 2a^2 n^2 f^2 + n^4 f^4).$

Um das Moment der Trägheit des halben Ellipsoids zu erhalten, muß man in dem eingeklammerten Factor für n alle ganze Zahlen von 1 bis m setzen, und die Summe aller sich so ergebenden Werthe desselben mit $\frac{\pi c^4}{a^4} f.P$ multipliciren. Da derselbe aus drei Gliedern ($a^4, -2a^2 n^2 f^2, + n^4 f^4$) besteht, so wollen wir die Summe für jedes Glied besonders angeben. Nun wird aber, wie aus dem in dem vorhergehenden (§.) Erklärten hinreichend hervorgeht

$$7)\ S.a^4 = m a^4,$$

$$8)\ -2S.a^2 n^2 f^2 = -\tfrac{2}{3} a^2 m^3 f^2,$$

$$9)\ S.n^4 f^4 = \frac{m^5}{5} f^4.$$

Addirt man diese Summen, multiplicirt das Resultat mit $\frac{\pi c^4}{2a^4} f.P$, und verdoppelt es, so erhält man das Moment der Trägheit (V) des ganzen Ellipsoids, oder

$$10)\ V = \left(\pi c^4 m f - \frac{2\pi c^4 m^3 f^3}{3a^2} + \frac{\pi c^4}{5a^4} m^5 f^5\right) P,$$

oder da $m.f = a$

$$11)\ V = \pi P\left(c^4 a - \frac{2c^4 a}{3} + \frac{c^4 a}{5}\right),$$

oder $12)\ V = \tfrac{8}{15}.\pi c^4 a.P.$

Der Inhalt des Ellipsoids ist $= \frac{4}{3}\pi a c^2$, also sein Gewicht $= \frac{4}{3}\pi a c^2 P$. Setzt man dieses $= M$, so kommt

$$13)\ V = \tfrac{2}{5} c^2.M.$$

Eben so erhielte man, wenn das Gewicht des durch Umdrehung um die kleine Achse erzeugten Ellipsoids $= M'$, und das Moment der Trägheit desselben gegen die kleine Achse $= V'$ gesetzt wird

14) $V' = \frac{2}{5} a^2 M'$.

Um das Moment der Trägheit (V'') einer Kugel von dem Halbmesser a gegen einen ihrer Durchmesser als Achse zu finden, braucht man nur in 12) $c = a$ zu setzen. So erhält man

15) $V'' = \frac{8}{15} \pi a^5 . P$.

Der Inhalt der Kugel ist $= \frac{4 \pi a^3}{3}$, also ihr Gewicht $= \frac{4 \pi a^3}{3} . P$. Setzt man dieses $= M''$, so kommt

16) $V'' = \frac{2}{5} a^2 M''$.

§. 82.

Aufgabe. Eine Kugel (fig. 35.), welche an einem feinen Faden oder Drahte o c befestigt ist, schwingt mit dem Drahte um dessen obern Endpunkt c. Man soll das Moment der Trägheit des ganzen Körpers gegen eine durch c laufende und auf c o senkrechte (horizontale) Achse finden.

Auflös. Das Gewicht der Kugel sey $= M$, ihr Halbmesser $= a$, das Gewicht des Drahtes oder Fadens $= N$, seine Länge $= c$. — Da der Draht sehr dünn ist, so kann man ihn als einen Cylinder, dessen Halbmesser unendlich klein ist, ansehen. Sein Moment der Trägheit gegen die Achse durch c ist also nach (§. 77. Zus 1.) $= \frac{N . c^2}{3}$. Das Moment der Trägheit der Kugel ist gegen jeden seiner Durchmesser oder gegen jede durch ihren Schwerpunkt laufende Achse $\frac{2}{5} M . a^2$. Da nun die Achse durch c um die Länge des Fadens + der des Halbmessers (um $a + c$) von dem Schwerpunkt der Kugel entfernt ist, so ist das Moment der Trägheit der Kugel gegen die Achse durch c (nach §. 73. 11.) $=$
$= (\frac{2}{5} a^2 + (a+c)^2) M = (\frac{7}{5} a^2 + 2ac + c^2) M$. —

Setzt man hierzu noch das Moment $\left(\frac{N.c^2}{3}\right)$ des Fadens, so erhält man das Moment (V) des ganzen Körpers, oder

$$1)\ V = \left(\tfrac{7}{5}a^2 + 2ac + c^2\right)M + \frac{Nc^2}{3}.$$

Um die Länge des einfachen Pendels zu finden, das mit dem hier betrachteten in gleicher Zeit schwingt, muß man nach (§. 71. Zus.) das statische Moment des Pendels gegen die Achse durch c suchen. Der Schwerpunkt des Drahtes liegt in der Mitte seiner Länge, und der der Kugel liegt in ihrem Mittelpunkt. Der erstere ist daher um $\frac{1}{2}c$, und der zweite um $a + c$ von der Achse entfernt. Folglich ist das statische Moment des erstern $= \frac{N.c}{2}$, und das des zweiten $M(a+c)$; also die Summe beider $= (a + c)\ M + \frac{1}{2}N.c.$ Hierdurch erhält man nach (§. 71. 4.).

$$2)\ l = \frac{\left(\tfrac{7}{5}a^2 + 2ac + c^2\right)M + \frac{Nc^2}{3}}{(a+c)\ M + \frac{1}{2}.Nc.}$$

Anmerk. Das Vorhergehende wird hinreichen, theils um von der Methode überhaupt, wie man bei Aufsuchung des Moments der Trägheit verfahren muß, einen Begriff zu erhalten, theils auch um dieses Moment in den wichtigsten, in der Ausübung vorkommenden Fällen zu finden. Wie schon früher erinnert worden, ist hierbei die (Buchstabenrechn. Th. II. §. 74. Anmerk.) gegebene Regel ein wichtiges Hülfsmittel. Sie vertritt in Fällen, wo die Summe von Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, gefunden werden soll, die Stelle der Integralrechnung. Nur die Summe von Wurzelgrößen läßt sich dadurch nicht finden. — Wer mit der Integralrechnung vertraut ist, und sich näher unterrichten will, sehe: Poisson traité de Mécanique Liv. 3. (§. 347 — 369); und noch besonders: Euler theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, cap. V. et VI. Wir wollen, indem wir die Leser dahin verweisen, noch einen wichtigen Lehrsatz über die Pendel, wodurch es in mehreren Fällen überflüssig wird, das Moment der Trägheit zu finden, beifügen.

§. 83.

Wenn an einem schweren Körper zwei parallele Achsen so befestigt sind, daß die durch beide gelegte Ebene durch den

Schwerpunkt des Körpers geht, und der Körper macht, wenn er um eine dieser Achsen schwingt, in derselben Zeit eben viele Schwingungen, als auch, wenn er um die andere schwingt, so ist die Entfernung dieser beiden Achsen der Länge des einfachen Pendels gleich, welches mit dem Körper, denselben als zusammengesetztes Pendel betrachtet, eben viele Schwingungen macht. — Ist nämlich das Gewicht des Körpers $= M$, sein Moment der Trägheit gegen die erste Achse $= V$, gegen die zweite $= V'$, gegen eine durch den Schwerpunkt mit den beiden parallel gelegte $= Q$, der Abstand der ersten Achse vom Schwerpunkt $= a$, der der zweiten $= b$, die Länge des eben näher bestimmten einfachen Pendels in Beziehung auf die erste Achse $= l$, auf die zweite $= l'$, so ist nach (§. 73.)

1) $V = Q + a^2 . M$,

2) $V' = Q + b^2 . M$,

daher nach (§. 71. 4.)

3) $l = \frac{Q + a^2 M}{a M}$,

4) $l' = \frac{Q + b^2 M}{b M}$.

Aber da der Körper um beide Achsen eben schnell schwingt, so ist $l = l'$, also

5) $\frac{Q + a^2 M}{a M} = \frac{Q + b^2 M}{b M}$.

6) $\frac{Q}{a M} + a = \frac{Q}{b M} + b$.

Hieraus wird

7) $Q = a . b . M$.

Setzt man diesen Werth von Q in 3), so kommt

8) $l = \frac{a b M + a^2 M}{a M}$,

oder 9) $l = a + b$, wo $a + b$ dem Abstand der beiden Achsen von einander gleich ist.

§. 84.

Wenn man die Schwingungszeit für ein Pendel von bekannter Länge, und für einen ebenfalls bekannten Elongations-

winkel kennt, so kann man den Werth des Buchstaben g oder der Geschwindigkeit, die ein fallender Körper in einer Secunde erhält, nach (§. 67. Zus. No. 1.) finden. Die dort angeführte Formel bezieht sich indessen auf ein einfaches Pendel. Allein in der Ausübung kann man nur zusammengesetzte Pendel anwenden. Man muß also aus demselben das einfache, welches eben schnell schwingt, nach den im (vorigen) gegebenen Regeln zu finden suchen. Gewöhnlich wird eine, an einem feinen Faden aufgehängte Kugel als Pendel gebraucht, wo dann die Länge des zugehörigen einfachen nach (§. 82. 2.), und der Werth von g nach (§. 67. Zus. No. 1.) gefunden wird. Die Pendellänge gibt diesen letztern Werth genauer, als irgend ein bis jetzt bekanntes Mittel, so wie überhaupt das Pendel zu den genauesten aller Werkzeuge gehört. Man kann nämlich

1tens ein Pendel eine geraume Zeit hindurch schwingen lassen, wodurch man die Zahl der Schwingungen, die es in einer bestimmten Zeit macht, also die Dauer Einer Schwingung sehr genau findet.

2tens. Die Reibung fällt bei dem Pendel, so wie bei der Wage, fast gänzlich weg, indem man das Pendel seine Schwingungen auf einer Schneide verrichten läßt. Besonders wird bei langen Pendeln die Wirkung der Reibung sehr schwach. (Th. I. §. 87.).

3tens. Auch der Widerstand der Luft ändert, wie sich durch die Theorie (Poisson traité de Mécan. liv. II. No. 273.) beweisen läßt, die Schwingungszeit des Pendels nicht, indem nämlich dadurch zwar die Zeit der aufsteigenden Schwingung etwas vermehrt, allein beim Herabsteigen der zu durchlaufenden Bogen gerade um so viel verkleinert wird, daß die Zeit Einer Schwingung im Ganzen sich nicht ändert. Doch ist dieses nur von dem Widerstand der Luft, oder von dem Kraftverlust, der dadurch entsteht, daß das Pendel die Luft als träge Masse in Bewegung setzen muß, zu verstehen. — Durch den Gewichtsverlust, den das Pendel dadurch erleidet, daß es sich in der Luft, als einer schweren Flüssigkeit, befindet, wird die Dauer Einer Schwingung allerdings ver-

längert. Verhält sich das Gewicht des Pendels zu dem einer Masse Luft von gleichem Volumen, wie h : i, so wird das Pendel in der Luft nicht von der ganzen Kraft der Schwere, sondern nur von einer Kraft beschleunigt, die sich zur Schwere wie $\left(1 - \frac{1}{h}\right) : 1 = (h - 1) : h$ verhält. Die aus der Pendellänge berechnete Beschleunigung ist daher auch nur $= \frac{h-1}{h} \cdot g$, und man muß sie noch mit $\frac{h}{h-1}$ multipliciren, um g zu erhalten.

4tens. Selbst wenn das Pendel nicht in einem vertikalen Kreisbogen schwingt, sondern wenn es, wie etwa bei einem an einem Faden aufgehängten Pendel leicht der Fall seyn könnte, aus der vertikalen Ebene abweicht, so wird dadurch die Dauer Einer Schwingung fast gar nicht geändert (siehe unten §. 86. Zus.). So viele Elemente der Genauigkeit indessen die Pendelversuche auch in sich vereinigen, so macht es doch eine beträchtliche Schwierigkeit, daß man sich in der Ausübung nur eines zusammengesetzten Pendels bedienen kann, wogegen fast bei allen Rechnungen die Länge des einfachen Pendels, das mit dem ersten eben schnell schwingt, zum Grunde liegt. Gewöhnlich braucht man, wie schon erinnert worden, eine an einem feinen Draht aufgehängte Kugel *) als Pendel. Man kann zwar, wenn die Maße dieses zusammengesetzten Pendels genau bekannt sind, die Länge des zugehörigen einfachen (nach §. 82.) berechnen. Allein wegen der Wichtigkeit, welche genaue Bestimmungen der Pendellänge für die Naturlehre haben, hat man mehrere Apparate (Pendelapparate) erfunden, um alle nöthigen Maße mit der größten Genauigkeit bestimmen zu können. Wir wollen, da man sie nur

---

*) Herr von Zach brauchte bei seinem, nun durch bessere verdrängten, Pendelapparate einen doppelten Kegel als schwingenden Körper. Es ist leicht, auch das Moment der Trägheit eines solchen Kegels, nach den früher erklärten Regeln, zu finden. Die Anfänger können sich dieses zur Uebungsaufgabe nehmen.

selten ausführlich erklärt findet, eine Beschreibung derselben, jedoch um die Folge der Sätze nicht zu unterbrechen, im Anhang mittheilen. Vermittelst dieser Apparate hat man die Länge des Sekundenpendels unter dem Aequator, und an der Oberfläche des Meeres

$= 0{,}990864$ Meter

$= 36{,}60385$ Paris. Zoll

gefunden. Setzt man diesen Werth $= l$, und für einen andern Ort der Erde, dessen geograph. Breite $= \beta$, diese Länge des Sekundenpendels $= l'$, so ist

$$1)\ l' = l\,(1 + 0{,}00519 \sin. \beta^2).$$

Hieraus ist der Werth von g nach der Formel (§. 67. Zus. No. 2.) berechnet, und so, wie (§. 32.) angibt, gefunden worden; nämlich den Werth von g für $\beta = 45^0$ Grad $= g'$ gesetzt,

$$2)\ g' = 9{,}804812 \text{ Met.} = 30{,}18352 \text{ Paris. Fuß} =$$
$$= 31{,}2407 \text{ Rhein. Fuß.}$$

§. 85.

Da die Schwingungszeit eines einfachen Pendels, wenn es einen unendlich kleinen Bogen durchläuft, an demselben Ort einzig von seiner Länge abhängt, so hat man die Länge des Sekundenpendels als ein allgemeines, durch die Natur selbst bestimmtes, Längenmaß vorgeschlagen, welches auch bei dem Untergange aller Mustermaße immer wiedergefunden werden könnte. Der erste, welcher diesen Vorschlag machte, war der berühmte Huyghens in seinem Werk: de horolog. oscillator. prop. 25. Der Umstand, daß die Schwere, also auch die Länge des Sekundenpendels, nicht an allen Orten der Erde gleich ist, welcher Huyghens unbekannt gewesen zu seyn scheint, vielleicht auch die Schwierigkeit, die Länge des einfachen Sekundenpendels genau zu finden, waren Ursache, daß dieser Vorschlag nicht ausgeführt wurde. Bei der großen Genauigkeit, womit man jetzt diese Länge zu messen versteht, möchte indessen dieser Vorschlag, ein allgemeines Längenmaß zu finden, der allerzweckmäßigste seyn. Die Ungleichheit der Schwere an den verschiedenen Orten der Erde macht kein wirk-

liches Hinderniß, da die Schwere an demselben Orte der Erde sich durchaus gleich bleibt.

Mit dem größten Erfolg hat man die Pendel zu einer genauen Messung und Eintheilung der Zeit benutzt Die Uhren haben bloß dadurch, daß man die Pendel an denselben angebracht hat, den jetzigen Grad der Vollkommenheit erlangt. Bei einer jeden Uhr muß man zwei Kräfte unterscheiden, nämlich eine, welche sie in Bewegung (im Gang) erhält, und eine andere, welche ihren Gang gleichförmig erhält. Bei den eigentlichen Pendeluhren geht die letztere Kraft von dem Pendel aus. Allein das Pendel würde durch die Reibung und den Widerstand der Luft sehr bald zum Stillstand gebracht werden, wenn nicht von Zeit zu Zeit eine Kraft auf dasselbe einwirkte, und ihm eine neue Geschwindigkeit ertheilte. Diese Kraft, welche die Uhr im Gang erhält, ist bei den Pendeluhren entweder ein Gewicht, oder eine um sich gewundene Stahlfeder. Ersteres wird an einer um ein Rad gewundenen Schnur aufgehängt, welches (Rad) dadurch eine umdrehende Bewegung um seine Achse erhält. Die Stahlfeder ist mit einem Ende an der Achse, und mit dem andern an dem innern Umfang eines hohlen Cylinders (die Trommel, oder das Federhaus genannt) befestigt. Die Achse ist durchaus unbeweglich. Indem man daher die Trommel herumdreht, windet sich die Feder um die Achse herum. Ueberläßt man die Trommel wieder sich selbst, so strebt sie, indem die Feder sich abwindet, sich ebenfalls herumzudrehen. Diese Bewegung theilt sich sowohl bei den durch Gewicht, als durch die Spannkraft einer Feder getriebenen Uhren mehreren andern Rädern, und zuletzt durch eine eigene Vorrichtung, die man Stoßwerk, Hemmung, (échappement) nennt, und die man sich aus den Werken über die Uhrmacherkunst bekannt machen kann, dem Pendel mit, so daß es immer einen neuen Anstoß erhält, wodurch dasjenige, was seine Bewegung durch die Reibung und den Widerstand der Luft verloren, immer wieder ersetzt wird. — Da die Schwingungszeit eines Pendels von seiner Länge abhängt, diese aber durch die Wärme vermehrt, und durch die Kälte vermindert wird, so wird dasselbe Pendel in der Wärme lang-

samer schwingen, als in der Kälte, wenn man nicht durch eine besondere Vorrichtung diesem begegnet. Die dazu erforderliche Vorrichtung heißt die Kompensation. Man hat mehrere Arten derselben. Eine besteht darin, daß man die Linse nicht an Einer Stange, sondern an einem Gespärre von mehreren Stangen, die aus verschiedenen Metallen bestehen, aufhängt. Ein solches Pendel wird wegen seiner Gestalt ein Rostpendel genannt. a c, b d (fig. 36.) sind zwei vertikale Stangen von Eisen, die durch zwei horizontale Querstangen a b, c d zu einem festen Viereck verbunden sind. Auf der untern Querstange c d erhebt sich ein ähnliches Viereck α o e m, dessen vertikale Stangen aus einem andern Metall (Messing oder Zink), welches sich durch die Wärme stärker als Eisen ausdehnt, bestehen. Von dem obern Querbalken o e des zweiten Vierecks geht die eiserne Stange l n g herab, welche bei g die Linse S trägt. Die letztere Stange l n muß bei n durch die Querstange c d, zwar ohne zu schlottern, doch so durchgehen, daß sie sich in der Oeffnung nach vertikaler Richtung mit Leichtigkeit verschieben läßt. Dehnen sich nun die Stäbe a c, b d durch die Wärme aus, so sinkt dadurch der Mittelpunkt der Linse um die Größe dieser Ausdehnung herab. Durch die Ausdehnung der Stäbe α o, m e wird er aber um die ganze Größe dieser Ausdehnung wieder gehoben, wogegen er durch die Ausdehnung der Stange l n g wieder sinkt. Dehnt nun das Metall der Stäbe α o, e m sich durch die Wärme stärker aus, als das der andern Stäbe, so wird bei einem schicklichen Verhältniß der Länge dieser Stäbe der Mittelpunkt γ der Linse unverrückt bleiben. Wenn man die dazu erforderliche Länge der Stäbe α o, e m sucht, so findet man dieselbe zuweilen größer, als die ganze Länge des Pendels. Man muß alsdann, um den Zweck zu erreichen, den Rost aus mehreren Vierecken zusammensetzen, wie (fig. 37.) zeigt, wo alle an einem obern Querbalken befestigten vertikalen Stäbe aus dem Einen, und alle an einem untern befestigten aus dem andern Metall bestehen. Es ist nun leicht einzusehen, daß der Mittelpunkt der Linse um die Summe der Ausdehnungen aller Stäbe der ersten Art gehoben, und um die Summe der Aus-

dehnung der Stäbe der zweiten Art gesenkt wird, wobei jedoch für Stäbe, die paarweise vorhanden sind, wie a c, b d, statt jedes Paars nur Ein Stab in Rechnung gebracht werden muß. Ist nun die Summe der Längen der Stäbe der ersten Art, die Länge des Stücks h r (fig. 37.), und des Halbmessers der Linse, wenn sie nämlich mit a c, b d aus demselben Metall besteht, mitgerechnet, bei einem gewissen Grad der Wärme $= l$, die Summe der Längen der Stäbe der andern Art $= l'$, sind dabei m, n die Factoren, womit die Länge der Stäbe der einen und andern Art multiplicirt werden muß, um die Veränderung der Länge, wenn die Temperatur sich um Einen Grad ändert, zu finden, so wird, wenn die Temperaturveränderung t Grade beträgt *), die erste Länge $= (1 \pm m t)\, l$, und die andere $= (1 \pm n t)\, l'$. Also die Aenderung der ersten $= \pm m t l$, und die der zweiten $= \pm n t l'$. Jeder dieser Ausdrücke hat ein doppeltes Zeichen, weil die Temperatur sowohl steigen als fallen kann. Soll nun der Mittelpunkt der Linse unverrückt bleiben, so muß

1) $m t l = n t l'$,

oder 2) $l : l' = n : m$ seyn.

Es gibt noch mehrere Arten von Kompensationen. Besonders ist eine deßhalb merkwürdig, weil sie sich nicht allein an Pendeluhren, sondern auch an Federuhren, d. h. an solchen, deren Gang durch eine sogenannte Unruhe, durch das abwechselnde Auf- und Abwinden einer Spiralfeder, gleichförmig erhalten wird, anbringen läßt, wie z. B. bei den Taschenuhren. Durch diese Kompensation ist es gelungen, Federuhren zu verfertigen, deren Gang eben so genau, als der der Pendeluhren ist, und die unter dem Namen Zeitmesser, Chronometer, (time-Keepers) Zeithalter oder Seeuhren bekannt sind. Mehreres hierüber sehe man in der neuen Ausgabe von Gehlers physikal. Wörterbuch, Artik. Kompensation und Chronometer.

---

*) Man muß hier aus der Naturlehre als bekannt annehmen, daß, bei festen Körpern, die Zunahme der Länge bei demselben Körper dem Unterschied der Temperatur proportional ist.

§. 86.

Obschon bei dem gewöhnlichen Pendel die Dauer einer Schwingung so groß, als die einer andern ist, so kann man die Bewegung desselben doch nicht eigentlich gleichförmig nennen. Das Pendel durchläuft nämlich nicht alle Theile des Bogens, durch den es sich bei Einer Schwingung bewegt, mit derselben Geschwindigkeit, sondern es fängt, beim Herabsteigen, mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit an, sich zu bewegen. Diese Geschwindigkeit nimmt zu, bis das Pendel zu der vertikalen Lage zurückgekehrt ist, wo sie beim Aufsteigen durch den entgegengesetzten Bogen wieder bis zu Null abnimmt. Es gibt indessen ein Pendel einer besondern Art, welches man Centrifugalpendel nennt, dessen Bewegung durchaus gleichförmig ist, so daß es nicht allein die ganzen Bogen, sondern auch jeden Theil derselben in verhältnißmäßig gleicher Zeit durchläuft Der schwere Punkt an diesem Pendel (der Schwingungspunkt der Linse oder Kugel) bewegt sich nicht in einem vertikalen Kreisbogen nach stets abwechselnder Richtung hin und her, sondern er durchläuft einen horizontalen Kreis qrbd (fig. 38.) immer nach derselben Richtung. Die Pendelstange muß sich zu dem Ende um den Aufhängungspunkt o nicht allein in Einer Ebene, sondern durchaus nach jeder beliebigen Richtung frei herumdrehen lassen, so, als ob der schwere Punkt nicht an einer festen Stange, sondern an einem vollkommen biegsamen Faden bei o (fig. 38.) aufgehängt wäre. Nun sey og eine vertikale Linie durch den Umdrehungspunkt o des Pendels, und die Pendelstange in die geneigte Lage ob gebracht, so daß $bog = \alpha$ der Elongationswinkel. Von b denke man sich ein Perpendikel bg auf die Vertikale og gefällt, und aus g als Mittelpunkt mit bg als Halbmesser einen horizontalen Kreis bdqr beschrieben. Wenn man nun den Endpunkt b des Pendels in dem Umfang dieses Kreises mit einer Geschwindigkeit $= c$ herumführt, so werden auf die Pendelstange, die man sich als eine mathematische, feste Linie vorstellen muß, folgende Kräfte wirken:

a) Das Gewicht (P) des schweren Punktes bei b wirkt

nach vertikaler Richtung b l abwärts. Die Kraft dieses Gewichts läßt sich in zwei andere, eine b c nach der Richtung der Pendelstange, und in eine andere, auf derselben senkrechte b a zerlegen, wovon die erste durch die Festigkeit der Stange ganz aufgehoben wird, und die andere das Pendel in der Ebene des Winkels α nach o g zurückzutreiben strebt. Diese letztere (b a) ist $=$ b l. cos. l b a $=$ P. cos. l b a, oder (da cos. l b a $=$ $=$ sin. c b l $=$ sin. α), b a $=$ P. sin. α.

b) Wirkt noch auf die Pendelstange die durch die Umdrehung im Kreis hervorgebrachte Centrifugalkraft, welche (wenn man b g $=$ r setzt) $= \frac{c^2 P}{g.r}$ ist. Die Richtung dieser Kraft geht von g nach b. Stellt man die Größe derselben durch b n dar, so läßt sie sich in zwei andere b s, b m zerlegen, wovon die erstere in die Richtung o b der Pendelstange fällt, und die andere senkrecht darauf steht. Nun ist b m $=$ b n. cos. n b m, oder (da ∢ n b m $=$ c b l $= \alpha$, indem n b m eben so, wie c b l mit n b s einen rechten Winkel ausmacht), b m $=$ b n. cos. α. Setzt man statt b n seinen Werth, nämlich den der Centrifugalkraft $= \frac{c^2 P}{g.r}$, so hat man

$$1)\ bm = \frac{c^2 P}{g.r} \cos.\alpha.$$

Ist nun die Kraft b a $=$ b m, so heben sich die beiden, auf die Pendelstange bei b wirkenden Kräfte auf, und der Punkt b geht mit gleichförmiger Geschwindigkeit in dem Kreis b d q r fort. Hierzu wird also erfordert, daß

$$2)\ P.\sin.\alpha = \frac{c^2 P.\cos.\alpha}{g.r},$$

oder $3)\ \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = Tg\,\alpha = \frac{c^2}{g.r}$

sey. Ist $Tg\,\alpha$ nicht $= \frac{c^2}{g.r}$, so vergrößert oder vermindert sich, wenn man das Pendel sich selbst überläßt, der Winkel α so lange, bis wirklich $Tg\,\alpha = \frac{c^2}{g.r}$, oder

$\sqrt{(g.r.Tg.\alpha)} = c$. Setzt man nun die Länge o b der Pendelstange $= l$, so ist $og = r = l.\sin.\alpha$, also der Umfang (b d q r) des zugehörigen Kreises $= 2\pi r = 2\pi l.\sin.\alpha$. Da derselbe nun mit einer Geschwindigkeit $c = \sqrt{(g.r.Tg.\alpha)} =$ $= \sqrt{\left(\frac{g\,l.\sin.\alpha^2}{\cos.\alpha}\right)} = \sin.\alpha\sqrt{\left(\frac{g\,l}{\cos.\alpha}\right)}$ beschrieben wird, so findet man für die Zeit (t), worin derselbe durchlaufen wird:

$$4)\ t = \frac{2\pi r}{c} = \frac{2\pi l.\sin.\alpha}{\sin.\alpha}\sqrt{\left(\frac{\cos.\alpha}{g.l}\right)},$$

oder $5)\ t = 2\pi\sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}\sqrt{(\cos.\alpha)}$.

Ist α unendlich klein, so ist $\sqrt{\cos.\alpha} = 1$. Hierdurch wird

$$6)\ t = 2\pi\sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem (§. 67. 13.) für die Zeit, worin ein gewöhnliches Pendel von der Länge l einen unendlich kleinen Bogen durchläuft, gefundenen, so findet man, daß der erstere noch einmal so groß ist, als der letztere. Die Bewegung durch den Kreis b d q r gilt nämlich für den Hin- und Hergang eines gewöhnlichen Pendels.

Zusatz. Wenn das Pendel auch nicht gerade einen horizontalen Kreis, sondern eine jede andere krumme Linie, die es nämlich durch seine Umdrehung um o beschreiben kann, beschreibt, so ändert sich dadurch die Zeit eines Umlaufs nicht merklich. Der Punkt b muß nämlich, da die Länge o b des Pendels unveränderlich ist, nothwendig auf der Oberfläche einer Kugel von dem Halbmesser o b bleiben. Jede Bewegung des Punktes b läßt sich in zwei von einander unabhängige zerlegen. Vermöge der ersten nähert sich die Pendelstange der Vertikalen o g, oder sie entfernt sich von derselben, und vermöge der zweiten beschreibt sie einen Bogen eines auf o g senkrechten Kreises. Da die erstere Bewegung sich so lange fortsetzt, bis der Punkt b denjenigen horizontalen Kreis zu beschreiben anfängt, den er bei der Größe der Centrifugalkraft beschreiben kann und muß, und da jeder dieser horizontalen Kreise, also auch jeder Grad des einen und andern in

gleicher Zeit durchlaufen wird, so muß, wenn nicht eine Kraft plötzlich, etwa ein Stoß u. d. g. auf das Pendel einwirkt, die Dauer eines Umlaufs von dem erwähnten Umstand unabhängig seyn, womit auch die Erfahrung übereinstimmt. Hierauf bezieht sich auch (§. 84. 4). Hierhin gehören noch die Untersuchungen von Bernoulli über die pendula turbinantia. — Man sehe: opera Johan. Bernoulli tom. II. no. 97.

Anmerk. Der Uhrmacher Pfaffius in Wesel hat das Centrifugalpendel zuerst angewendet, um eine Uhr in Bewegung zu setzen. Um die Pendelstange geschickt zu machen, die erforderliche Bewegung anzunehmen, gibt er derselben, wie gewöhnlich, oben eine Schneide, so daß sie sich in einer auf diese Schneide senkrechten Vertikalebene hin und her bewegen kann. Die Pendelstange geht zu dem Ende durch eine Oeffnung, welche in der Mitte einer horizontalliegenden runden Stahlplatte von etwa $\frac{1}{3}$ Zoll durchmesser angebracht ist. Die Schneide der Pendelstange ruht auf der obern Seite dieser Platte. Zugleich aber ruht die Platte selbst auf zwei Spitzen, deren Verbindungslinie auf der Schneide senkrecht steht. Jeder Punkt der Stahlplatte, welche, um fester aufzuliegen, unten einen Einschnitt hat, kann sich nun in einer auf die Verbindungslinie der Spitzen senkrechten Ebene bewegen. Durch die Verbindung dieser beiden Bewegungen kann der Endpunkt des Pendels einen horizontalen Kreis, und überhaupt jede krumme Linie beschreiben, worin er von dem Punkt, wo sich die Schneide und die Verbindungslinie der beiden Spitzen schneiden, um die Länge der Pendelstange entfernt bleibt. Die Verbindung des Pendels mit der Uhr wird auf folgende Art hervorgebracht. o (fig. 39) sey der so eben erwähnte Durchschnittspunkt. Die Pendelstange selbst geht über denselben nach oben noch etwas fort, so daß sie in vertikaler Lage bis g reicht, wo sie in eine feine Spitze ausgeht. Gerade bei g endigt sich eine vertikale stählerne Achse d g, welche oberhalb d mit einem Rad oder Getriebe, das hier nicht dargestellt ist, allein unmittelbar bei g mit einem kreisförmig gebogenen Stahlstück g n verbunden ist, worin unten von g bis n eine Rinne eingeschnitten ist. Bringt man das Pendel in die geneigte Lage m o b, so greift die Spitze bei m in den Einschnitt von g n. Führt man nun das Ende b des Pendels in einem horizontalen Kreis herum, so beschreibt jeder Punkt des Stücks g n auch einen solchen Kreis. Hierdurch wird das an der Achse g d befestigte Getriebe, und so die Uhr in Bewegung gesetzt. Pfaffius hat diese Vorrichtung vorzüglich zur Regulirung der Terzienuhren benutzt. Da nämlich die Bewegung dieses Pendels durchaus gleichförmig ist, so braucht man, wenn der Zeiger in Einer Sekunde Einmal her-

umläuft, das Zifferblatt nur in 60 Theile einzutheilen, so wird der Zeiger jeden Theil in Einer Terzie durchlaufen. Um diese Uhr gebrauchen zu können, muß die Bewegung der Zeiger augenblicklich gehemmt, und wieder hergestellt werden können, welches dadurch geschieht, daß die Verbindung zwischen dem Pendel und dem Räderwerk der Uhr bald aufgehoben, und bald wieder hergestellt wird. Pfaffius hat indessen auch bei andern Uhren denselben Mechanismus angebracht. Der Gang solcher Uhren ist sehr richtig. Nur erfordern sie einen vorzüglich festen Stand.

§. 87.

A, B (fig. 41) seyen zwei Rollen von gleichem Durchmesser, deren Mittelpunkte in derselben Vertikallinie liegen. Um dieselben sey eine vollkommen biegsame Schnur ohne Ende geschlungen, woran auf der einen Seite ein Gewicht P und auf der andern ein Gewicht Q, größer als P, aufgehängt ist. — Man soll bestimmen, wie tief das Gewicht Q in einer bestimmten Zeit t herabsinkt, wenn bei dem Sinken von Q beide Rollen sich um ihren Mittelpunkt drehn. —

Da die Schnur sich eben so schnell als der Umfang der Rolle bewegt, so findet zwischen der Schnur und der Rolle keine Reibung Statt. Also kann nur die Unbiegsamkeit der Schnur der Bewegung ein Hinderniß entgegensetzen, welches wir indessen hier vernachlässigen wollen. Eben so wollen wir fürs Erste die Reibung an der Achse beider Rollen bei Seite setzen. Die Kraft, welche beide Rollen nebst der Schnur in Bewegung setzt, ist offenbar $= Q - P$, welche an dem Umfang der obern Rolle und zwar nach der Richtung der Tangente wirkt. Die Gewichte P, Q, und eben so alle Punkte der Schnur erhalten dieselbe Geschwindigkeit, als ob sie an dem Umfang der Rolle selbst angebracht wären. Ist daher der Halbmesser der Rollen $= r$, das Gewicht der Schnur $= S$, so ist es in Beziehung auf die Bewegung, welche die Rollen erhalten, gerade so, als ob das Moment der Trägheit Einer der Rollen um $P r^2 + Q r^2 + S r^2 = (P + Q + S) r^2$ vermehrt wäre. Ist daher das Moment der Trägheit jeder Rolle $= V$, also das beider Rollen $= 2V$, die Umdrehungsbeschleunigung jeder Rolle $= \beta'$, so ist nach (§. 70. 6)

$$1)\ \beta' = \frac{180 \cdot g \cdot (Q-P)r}{\pi \cdot (2V + (P+Q+S)r^2)}.$$

Man muß sich aus (§. 68) erinnern, daß hier β' in Graden ausgedrückt ist, oder daß es die Zahl der Grade vorstellt, die jeder Punkt des Umfangs in jeder folgenden Secunde durchlaufen würde, wenn die Kraft $(Q-P)$ Eine Secunde hindurch nach der Richtung der Tangente auf die Rollen eingewirkt hätte, und nun zu wirken aufhörte. — Nun ist aber für einen Kreis von dem Halbmesser r die Länge eines Bogens von Einem Grade $= \frac{\pi r}{180}$. Dem gemäß findet sich aus (1), wenn die wahre Beschleunigung jedes Punktes des Umfangs der Rolle $=$ f gesetzt wird,

$$2)\ f = \frac{g(Q-P)r^2}{2V + (Q+P+S)r^2}.$$

Da immer dieselbe Kraft und auf dieselbe Art auf das Werkzeug einwirkt, so wird die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte seyn. Man hat daher, wenn der von den Punkten des Umfangs der Rolle, also auch der von den Gewichten Q und P in t Secunden durchlaufene Raum $=$ y gesetzt wird, nach dem (Abschnitt III) Erklärten

$$3)\ y = \tfrac{1}{2} f t^2 = \frac{\tfrac{1}{2} g (Q-P) r^2 . t^2}{2V + (P+Q+S)r^2}.$$

Ist jede der beiden Rollen ein Cylinder, dessen Gewicht $=$ R, so ist nach (§. 80. 1)

$$4)\ V = \frac{r^2 . R}{2}.$$ Hierdurch wird

$$5)\ y = \frac{\tfrac{1}{2} g (Q-P) t^2}{R+P+Q+S}.$$

In dieser Aufgabe sind absichtlich zwei unter einander stehende Rollen angenommen worden, damit nämlich die Schnur auf beiden Seiten immer dieselbe Länge, folglich auch dasselbe Gewicht behalte. Das nämliche läßt sich auch mit Einer Rolle erreichen, wenn nämlich unten an jedem Gewicht noch eine frei herabhängende Schnur von solcher Länge befestigt ist, daß sie zum Theil auf dem Boden aufliegt, wo denn beim

Sinken des Gewichts Q sich ein eben so langer Theil der Schnur auf den Boden auflegt, als sich auf der andern Seite davon abhebt. Man findet für diesen Fall den von dem Gewicht Q in der Zeit t durchlaufenen Raum (y), wenn man in (5) nur $\frac{1}{2}$ R statt R setzt. Hierdurch wird also

$$6)\ y = \frac{\frac{1}{2}g\,(Q - P)\,t^2}{\frac{1}{2}R + Q + P + S}.$$

Will man in diesem letztern Fall auch noch auf die Reibung am Zapfen oder an der Achse der Rolle Rücksicht nehmen, so berechne man nach dem was (Th. I. Abschn. VI.) gelehrt worden, die Kraft, welche an dem Umfang der Rolle angebracht werden muß, um der Reibung am Zapfen (Man sehe Th. I. §. 87) das Gleichgewicht zu halten. Ist dieselbe in Gewicht ausgedrückt = F, so ist die Kraft, welche an dem Umfang der Rolle wirkt = Q — P — F. Also

$$7)\ y = \frac{\frac{1}{2}g\,(Q - P - F)\,t^2}{\frac{1}{2}R + Q + P + S}.$$

Bei demselben Versuch bleiben die Werthe von $\frac{1}{2}$g, Q, P, F, $\frac{1}{2}$R, S ungeändert. Daher ist $\frac{\frac{1}{2}g\,(Q - P - F)}{\frac{1}{2}R + Q + P + S}$ eine beständige Größe. Setzt man dieselbe = a, so wird

8) $y = a.t^2$

Nennt man für eine andere Zeit t′ den von dem Gewicht Q durchlaufenen Raum y′, so ist

9) $y' = at'^2$. Also aus 8) und 9)

10) $y : y' = t^2 : t'^2$.

Die durchlaufenen Räume verhalten sich also ebenfalls, wie die Quadrate der Zeiten.

Anmerk. Da das, was hier über die Bewegung der Gewichte Q, P und der Rolle, woran sie angebracht sind, gesagt worden, sich ganz auf das, was (Abschn. III. §. 32) über die Bewegung der frei fallenden Körper gelehrt worden, gründet, so kann man eine solche Rolle mit einer darüber geschlungenen Schnur, an deren beiden Enden Gewichte angebracht sind, auch benutzen, um die in dem angeführten Abschnitt vorgetragene Theorie des Galilei durch die Erfahrung zu prüfen. — Atwood hat dazu eine Vorrichtung erfunden, die unter dem Namen der Atwoodschen Fallmaschine bekannt ist.

Siebenter Abschnitt.

Von der Umdrehungsbewegung überhaupt.

§. 88.

Von der Bewegung, die ein Körper, der sich um eine feste, unverrückbare Achse drehn kann, durch die Wirkung von Einer oder auch von noch so vielen Kräften erhält, ist im vorigen Abschnitt hinreichend gehandelt worden. Wir wollen nun in diesem die Bewegung näher betrachten, welche einem entweder ganz freien oder um einen festen Punkt beweglichen Körper durch die Einwirkung bestimmter Kräfte ertheilt wird. Man muß sich hierbei vor Allem dasjenige ins Gedächtniß zurückrufen, was (§. 15 und 16) in Beziehung auf die Bewegung überhaupt (phoronomisch betrachtet) gesagt worden, daß man sich nämlich jede mögliche Bewegung eines Körpers aus der fortschreitenden und umdrehenden zusammengesetzt denken kann. — Obschon nun aber nach den angeführten (§) jeder Körper in jede Lage, die er anzunehmen fähig ist, dadurch gebracht werden kann, daß man einem beliebigen Punkt desselben und einer bestimmten durch diesen Punkt gezogenen Linie eine progressive Bewegung, und dem Körper zugleich eine umdrehende Bewegung um diese Linie als Achse ertheilt, so folgt daraus doch nicht, daß, wenn man in einem bestimmten Falle einen solchen Punkt angenommen und die dazu gehörige Achse bestimmt hat, der Körper auf diese Art seine Lage wirklich erhalten hat. So wie nämlich derselbe bewegliche Punkt auf unendlich vielen Wegen von einem Punkt des Raumes zu einem andern gebracht werden, und so wie, wenn etwa der bewegliche Punkt innerhalb eines Körpers angenommen worden, sich der letztere um unendlich viele Achsen, die alle durch den angenommenen Punkt gehn, drehn kann; so kann auch der Körper dieselbe Lage auf unendlich viele Arten erhalten. Um also alle Zweideutigkeit zu heben, muß man die Bewegung des Körpers nur während eines unendlich kleinen Zeittheilchens betrachten.

In einem Solchen kann nämlich derselbe Punkt des Körpers sich nur nach Einer Richtung bewegen, und für eine solche Bewegung und für Einen Punkt gibt es auch nur Eine Achse, um die sich der Körper drehn muß, wenn er in die Lage kommen soll, worin er wirklich kommt. Die ganze Aufgabe über die Umdrehungsbewegung eines Körpers läßt sich also darauf zurückbringen: Für jede Zeit 1) die Richtung und Geschwindigkeit Eines Punktes desselben; 2) die Lage der durch diesen Punkt gezogenen Achse, um die sich der Körper dreht, und 3) die Richtung und Geschwindigkeit dieser Umdrehungsbewegung zu bestimmen. Der Punkt, wofür man die progressive Bewegung und die Lage der Achse sucht, bleibt dabei noch willführlich (§. 16. Zus.). Jedoch wird die Untersuchung gewöhnlich am einfachsten, wenn man den Schwerpunkt zu diesem Punkt annimmt. — Uebrigens bleibt die Aufgabe die Bewegung zu finden, welche bestimmte Kräfte einem völlig freien oder auch um Einen Punkt beweglichen Körper ertheilen, eine der schwierigsten der ganzen Mechanik, deren Auflösung alle von der höhern Analysis gebotenen Hülfsmittel in Anspruch nimmt, und selbst vermittelst dieser nur in wenigen einzelnen Fällen vollständig gelingt. Wir müssen daher, indem wir auf die ausführlichern Werke über die Mechanik, insbesondere auf: Poisson traité de Mécan. tom. II. Liv. III. chap. 4 et 5; Lagrange Mécan. analyt. tom. II. sect. 9; Euler theoria motus corpor. rigid. seu solid. cap. 15 et 16) verweisen, uns auf einige allgemeine Sätze, welche indessen die Grundlage aller hierhin gehörigen Untersuchungen enthalten, beschränken.

§. 89.

Wenn ein körperliches Element, welches an einem Punkt einer mathematischen Linie unverrückbar befestigt ist, eine kreisförmige Bewegung, bei welcher sich diese Linie um einen ihrer Endpunkte als Mittelpunkt dreht, erhalten hat; so wird es, wenn dieser Mittelpunkt unbeweglich ist, und keine Kräfte auf das Element einwirken, ohne Ende fortfahren, sich in denselben Kreis mit derselben Geschwindigkeit umzudrehn. Ist daher

einem System von unendlich vielen untereinander fest verbundenen Elementen, oder ist einem Körper eine Umdrehungsbewegung um eine unbewegliche Achse ertheilt worden, so wird der Körper, wenn ferner keine Kräfte auf ihn einwirken, ins Unendliche fortfahren, sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Achse zu drehn. Bei dieser Bewegung beschreiben nämlich alle Punkte des Körpers, und zwar mit derselben Winkelgeschwindigkeit, Kreise um einen unbeweglichen Mittelpunkt. — Erhält aber ein Körper eine Umdrehungsbewegung um eine geometrische Achse, welche nicht befestigt ist; so wird er, wenn auch schon ferner keine beschleunigenden Kräfte auf ihn einwirken, darum nicht nothwendig seine Umdrehungsbewegung um dieselbe Achse immer fortsetzen. Denn durch die Umdrehungsbewegung selbst erhält (§. 44 und 45) jedes umlaufende körperliche Element eine Schwungkraft, wodurch es sich von dem Mittelpunkt des Kreises zu entfernen, also diesen Mittelpunkt, wenn er nicht fest ist, zu verrücken strebt. Dreht sich nun ein fester Körper um eine Achse, so übt jedes Element desselben auf den Mittelpunkt des Kreises, den es beschreibt, also auf einen Punkt der Achse eine gewisse Gewalt aus. Es kann nun wohl geschehn, daß die Pressungen, welche die Achse dadurch von den verschiedenen Elementen des Körpers erleidet, sich von selbst einander aufheben. In diesem Falle braucht die Achse gar nicht gehalten zu werden, und ein völlig freier Körper, dem man eine Umdrehung um eine solche Achse ertheilt hat, wird, wenn auch die Achse nicht befestigt ist, seine Umdrehungsbewegung um dieselbe ins Unendliche fortsetzen. Jede in einem Körper gezogene Linie, für welche als Achse betrachtet, die durch die Umdrehung um dieselbe erzeugten Schwungkräfte sich selbst aufheben, heißt eine freie Achse oder eine Achse der freien Umdrehung. Es gibt deren, wie sogleich bewiesen werden wird, für jeden Körper wenigstens drei, welche mit den durch seinen Schwerpunkt gezogenen mechanischen Hauptachsen (§. 74) zusammenfallen.

§. 90.

ba (fig. 42.) sey die Achse, um welche sich ein Körper, auf den weiter keine Kräfte wirken, dreht. Um nun den Druck, welche diese Achse durch die Wirkung der Schwungkräfte erleidet, zu finden, nehme man ba zur (geometrischen) Achse X, so wie einen willkührlichen Punkt b derselben zum Anfangspunkt an, und ziehe durch diesen noch zwei andere geometrische Achsen bc (Y), bd (Z), die sowohl gegen ba, als auch gegen einander unter einem rechten Winkel geneigt sind. Man betrachte nun ein unendlich kleines Massentheilchen des Körpers bei o. Fällt man von demselben eine senkrechte oe auf die Umdrehungsachse ba, so ist jene (oe) der Halbmesser des Kreises, den o bei der Umdrehung des Körpers beschreibt. Vermöge der Schwungkraft hat das Massentheilchen bei o ein Bestreben nach der verlängerten Richtung eo oder nach oh fortzugehn, wodurch die Achse ba bei e nach der Richtung eo mit einer Kraft, die der Schwungkraft gleich ist, gezogen wird. Die Größe dieser letztern ist aber, wenn das Gewicht des Elements bei o = P, seine Geschwindigkeit = f, der Halbmesser oe des Kreises, den es beschreibt, = r gesetzt wird, nach (§. 44.), $= \frac{f^2 . P}{g . r}$. Ist die Umdrehungsgeschwindigkeit des Körpers (§. 8.), welche für alle Punkte desselben gleich groß ist, $= \gamma$; so ist $f = \gamma . r$ (wenn nämlich γ den Bogen, den o in Einer Sekunde durchläuft, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt darstellt (§. 8.). Setzt man die Schwungkraft von o (in Gewicht ausgedrückt) = V, so wird hierdurch

$$1)\ V = \frac{\gamma^2 . r . P}{g}.$$

Die Linie oh (fig. 42.) (welche eine Verlängerung von oe) stelle diese Kraft V der Größe nach dar, und man zerlege dieselbe in zwei andere mh ⋕ bd, om ⋕ bc. Fällt man noch von o die Linie os senkrecht auf die Ebene dba, und verbindet s mit e, so ist (da oe senkrecht auf ba), auch $\angle$ sea = R, oder os ist das y, se das z, und be das x des Punktes o. Zugleich ist $\triangle$ hmo ∽ soe. Daher

2) $oh : mh = oe : es = r : z$,

3) $oh : om = oe : os = r : y$.

Aus 2) und 3) folgt

4) $mh = \frac{oh \cdot z}{r}$,

5) $om = \frac{oh \cdot y}{r}$.

Setzt man die Kraft nach mh in Gewicht ausgedrückt $= N$, die nach $om = Q$, so erhält man, wenn noch statt oh die Kraft $V = \frac{\gamma^2 . r . P}{g}$ gesetzt wird,

6) $N = \frac{\gamma^2 . P . z}{g}$,

7) $Q = \frac{\gamma^2 . P . y}{g}$.

Da die Richtung (oh) der Schwungkraft des Elements o verlängert die Umdrehungsachse bei e schneidet, so kann man sich die Schwungkraft, folglich auch die Kräfte om, mh, worin sie zerlegt worden, bei e selbst angebracht denken. Die Wirkung, welche das Element o vermöge seiner Schwungkraft auf die Achse ba hervorbringt, besteht also darin, daß diese letztere an dem Punkt e, dessen Abstand be von b dem x des Punktes o gleich, nach der Richtung $es \# bd$ mit einer Kraft $N = \frac{\gamma^2 . P . z}{g}$, und nach der Richtung $el \# bc$ mit einer Kraft $Q = \frac{\gamma^2 . P . y}{g}$ gedrückt wird, wo z und y die Coordinaten des Punktes o bedeuten. Denkt man sich nun den Körper in unendlich viele Elemente, die nach allen Dimensionen unendlich klein sind, getheilt, nennt man dabei die Massen oder Gewichte dieser Elemente der Ordnung nach $P, P' P''$ u. s. f., die Coordinaten der Punkte, wo sich die Elemente befinden, derselben Ordnung nach $x, x', x'' \ldots; y, y', y'' \ldots; z, z', z'' \ldots$; die Pressungen, welche die verschiedenen Punkte der Achse parallel mit bd erleiden, $N, N', N'' \ldots$; die mit bc parallelen $Q, Q', Q'' \ldots$; so erhält man

$$8)\ N = \frac{\gamma^2 . P . z}{g};\ N' = \frac{\gamma^2 . P' z'}{g}\ \text{u. s. f.}$$

$$9)\ Q = \frac{\gamma^2 . P . y}{g};\ Q' = \frac{\gamma^2 . P' . y'}{g};$$

$$Q'' = \frac{\gamma^2 . P'' . y''}{g}\ \text{u. s. f.}$$

Die Punkte der Achse ba, wo diese Kräfte angebracht sind, sind von b der Ordnung nach um x, x', x'' u. s. w. entfernt. Die Schwungkräfte aller Elemente des Körpers sind also hierdurch auf zwei Systeme paralleler Kräfte, welche alle an Punkten derselben geraden Linie (der Umdrehungsachse ba) wirken, zurückgebracht. — Ob parallele Kräfte eine und welche Resultirende sie haben, findet man eben so wie den Punkt, wo diese Resultirende angebracht ist, aus (Th. I. Abschn. II. §. 39. 7, 9, 11, 13, und §. 40.). Da hier die Kräfte alle an Punkten derselben geraden Linie wirken, so ist der Ort der Resultirenden durch seine Entfernung von b (in ba) oder durch sein x völlig bestimmt. Setzt man nun für die mit bd parallelen Kräfte die Resultirende = H, das x des Punktes, wo sie in ba angebracht ist = a; so hat man, wenn man (Th. I. Abschn. II. §. 39. 7, 9, 11, 13) N, N' u. s. f. statt P, P', P'' u. s. f., überdem y = y' = y'' u. s. f. = o, und eben so z = z' u. s. f. = o setzt,

$$10)\ H = N + N' + N'' + \ldots$$

$$\text{oder } 11)\ H = \frac{\gamma^2 z . P}{g} + \frac{\gamma^2 z' . P'}{g} + \frac{\gamma^2 z'' . P''}{g} + \ldots$$

$$\text{oder } 12)\ H = \frac{\gamma^2}{g}(P z + P' z' + P'' z'' + \ldots)$$

$$13)\ a = \frac{N x + N' x' + N'' x'' + \ldots}{N + N' + N'' + \ldots}$$

$$\text{oder } 14)\ a = \frac{P x z + P' x' z' + P'' x'' z'' + \ldots}{P z + P' z' + P'' z'' + \ldots}.$$

Eben so findet man, wenn man die Resultirende aller mit bc (Y) parallelen Kräfte durch H', und das x des Punktes bc, wo sie angebracht ist, durch a' bezeichnet,

15) $H' = Q + Q' + Q'' + \ldots$

oder 16) $H' = \frac{\gamma^2}{g}(Py + P'y' + P''y'' + \ldots$

17) $a' = \frac{Qx + Q'x' + Q''x'' + \ldots}{Q + Q' + Q'' + \ldots}$

oder 18) $a' = \frac{Pxy + P'x'y' + P''x''y'' + \ldots}{Py + P'y' + P''y'' + \ldots}$.

Soll die Achse durch die Wirkung aller dieser Kräfte gar keinen Druck erleiden, so müssen sich die Kräfte beider Systeme, und zwar die eines jeden Systems für sich, im Gleichgewicht halten. Dieses wird aber nach (Th. I. Abschn. II. §. 40. δ) dann, und zwar auch nur dann *) der Fall seyn, wenn in 13) und 17), also auch in 14) und 18) Zähler und Nenner $= 0$ ist. Bezeichnet man, wie früher, die Summe aller ähnlichen Ausdrücke, wie Py, $P'y'$ u. s. f. dadurch, daß man einem derselben den Summenbuchstaben S. vorsetzt, also $Py + P'y' + \ldots$ durch S. P. y; eben so $Pxy + P'x'y' + \ldots$ durch S. Pxy; so wird die Achse ba (fig. 42.) durch die Schwungkräfte dann und auch nur dann keine Gewalt leiden, wenn folgenden vier Gleichungen ein Genügen geschieht,

19) $S.\left(\frac{\gamma^2}{g} Py\right) = \frac{\gamma^2}{g} S.(Py)) = 0$, oder $S.(Py) = 0$,

*) In dem (Th. I. Abschn. II. §. 39 und 40.) betrachteten allgemeinen Fall, wo nämlich von der Wirkung von parallelen Kräften, die an beliebigen Punkten eines festen Körpers angebracht sind, gehandelt wird, kann das Gleichgewicht zwar auch noch unter andern Bedingungen bestehn. Allein hier, wo die Kräfte alle an Punkten derselben geraden Linie wirken, kann das Gleichgewicht nur unter den hier im Text angeführten Bedingungen Statt finden. Nach dem (Th. I.) gesagten können nämlich parallele Kräfte sich nur dann im Gleichgewicht halten, wenn man sie auf zwei an Größe einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte, deren Richtungen in Eine gerade Linie fallen, zurückbringen kann. Dieses kann aber für Kräfte, die an Punkten derselben geraden Linie, und nicht nach der Richtung dieser geraden Linie wirken, nur dann der Fall seyn, wenn sie an demselben Punkt dieser geraden Linie wirken, d. h. wenn, wie aus (Th. I. §. 40. δ) erhellt, hier in 14) und 18) der Zähler $= 0$ ist.

20) $\frac{\gamma^2}{g}$ S.(P z) = o, oder S.(P z) = o,

21) S.(P x z) = o,

22) S.(P x y) = o.

Aus diesen Gleichungen selbst erhellt, daß sie von der Größe der Winkelgeschwindigkeit unabhängig sind, so daß, wenn für irgend eine Winkelgeschwindigkeit, die man dem Körper um b a als Achse gibt, die Wirkungen der Schwungkräfte sich aufheben, dieses für jede Umdrehung, die er um dieselbe Achse erhält, auch der Fall seyn wird. — Ist das Gewicht des ganzen Körpers = M, das y seines Schwerpunkts = b, das z desselben = c, so ist M . b = S. (P y), M c = S.(P z) (Th. I. §. 42.). Hierdurch erhält man aus 11) 14, 16) und 18)

23) $H = \frac{\gamma^2 . M . c}{g}$,

24) $H' = \frac{\gamma^2 . M . b}{g}$,

25) $a = \frac{S . P x z}{M c}$,

26) $a' = \frac{S . P x y}{M b}$.

Bringt man in den Entfernungen a, a' von dem Punkt b (fig. 42.) in b a zwei Kräfte an, wovon die erste der Kraft H, und die zweite der Kraft H' gleich und entgegengesetzt ist, so ist dadurch die Wirkung der Schwungkräfte auf die Achse aufgehoben, und dieselbe braucht ferner nicht gehalten zu werden. — Wir wollen jetzt nur noch einige merkwürdige Fälle, worauf sich das Vorige bezieht, näher betrachten.

I. Geht die Achse b a (fig. 42.) durch den Schwerpunkt, so ist c = o, b = o, also auch S.(P z) = M c = o, S.(P y) = = M . b = o. Da überdem nur für eine Achse, die durch den Schwerpunkt geht, zugleich b = o und c = o, also auch nur für eine solche zugleich S.(P z) = M c = o, und S . P y = M b = o, so kann den Gleichungen 19), 20) nur dann ein Genügen geschehn, wenn die Achse b a (fig. 42.)

durch den Schwerpunkt geht. Jede freie Achse muß also nothwendig durch den Schwerpunkt gehn. Allein umgekehrt ist nicht jede Achse, die durch den Schwerpunkt geht, zugleich eine freie Achse. Hierzu muß nämlich außer den Gleichungen 19), 20) auch noch denen 21), 22) ein Genügen geschehn. Sollte nun aber dieses letztere für die Achse b a nicht der Fall seyn, so kann man doch durch den Schwerpunkt allezeit eine andere Achse so legen, daß für dieselbe auch zugleich den Gleichungen 21), 22) ein Genügen geschieht, wie im folgenden (§) bewiesen werden wird.

II. Geschieht nur den Gleichungen 21), 22) ein Genügen, und denen 19), 20) nicht, so erhalten H, H' (23, 24) bestimmte, endliche Werthe. Allein die von a, a' werden beide = o, (indem in 25) 26) der Zähler = o, und der Nenner nicht = o). Die beiden Kräfte H, H' müssen also beide in dem Anfangspunkt der Achse angebracht werden, wo aus beiden Eine Kraft $= \sqrt{(H^2 + H'^2)} = \frac{\gamma^2 . M}{g} \sqrt{(b^2 + c^2)}$ entsteht.

III. Geschieht den Gleichungen 19), 20) ein Genügen, und denen 21) 22) nicht, oder auch nur Einer von diesen letztern nicht, so stellen sich die Werthe von a, a' entweder beide oder auch nur Einer unter der Form eines Bruches dar, dessen Zähler endlich, und dessen Nenner = o; dessen Werth folglich = ∞. Ist z. B. S.P x z nicht = o, so wird a = ∞. Allein aus der Statik ist bekannt, daß dieses für parallele Kräfte, wie hier die mit Z parallelen, worin die Schwungkräfte zerlegt worden, nur dann der Fall ist, wenn sie sich auf zwei gleiche und entgegengesetzte, eine positive und eine negative bringen lassen, die nicht an demselben Punkt angebracht sind, wofür es also hier, wo alle Kräfte an Punkten derselben Linie wirken, keine Resultirende (H) gibt. *) Man muß in diesem Falle für die Resultirende aus den positiven und für die aus den negativen Kräften das zugehörige x besonders suchen, und jede an dem gehörigen Punkt der Achse

*) Man sehe die oben diesem (§) beigefügte Note.

anbringen. — Das für $S.(Pxz)$ Gesagte gilt ebenfalls für $S.(Pxy)$. Wenn also schon die Achse ba durch den Schwerpunkt geht, so daß die Summe der Schwungkräfte sowohl in Beziehung auf Z als Y = o, so üben dieselben doch auf die Achse ba eine Wirkung aus, es sey denn, daß zugleich $S.Pxz = o$, und $S.Pxy = o$. Ist dieses nicht der Fall, so wirken statt jeder der Kräfte H, H′ zwei Kräfte, und zwar in der Regel jede an einem andern Punkte der Achse.

§. 91.

Wenn man sich durch den Schwerpunkt eine andere Umdrehungsachse gelegt denkt, so kann man dieselbe ebenfalls als eine der Coordinatenachsen annehmen, mit ihr zwei andere rechtwinkelige Coordinatenachsen verbinden, und die Wirkung der Schwungkräfte auf die erste durch die Umdrehungsgeschwindigkeit, so wie durch die Massen der Elemente und deren neue Coordinaten, gerade so wie (§. 90.) bestimmen. Bezeichnet man die Ordinate eines Punktes in Beziehung auf die neue Umdrehungsachse selbst durch $x_{,,}$, in Beziehung auf die zweite Coordinatenachse durch $y_{,,}$, auf die dritte durch $z_{,,}$, so wird die Wirkung der Schwungkräfte auf die neue Achse (außer von der Umdrehungsgeschwindigkeit, die aber, wenn die Wirkungen der Schwungkräfte sich aufheben, nicht in Betrachtung kommt, (siehe §. 90. nach No. 22.)) von den Werthen der Ausdrücke $S.Py_{,,}$, $S.Pz_{,,}$, $S.Px_{,,}y_{,,}$, $S.P.x_{,,}z_{,,}$ abhangen. Um diese Wirkung mit der auf die vorige Achse ba (fig. 42.) zu vergleichen, muß man die Coordinaten eines jeden Elements des Körpers in Beziehung auf die neuen Achsen genommen, durch die in Beziehung auf die vorigen ausdrücken. Zu dem Ende seyen (fig. 43.) ba, bc, bd die alten Achsen X, Y, Z (wie fig. 42.); b sey der Schwerpunkt des Körpers, und durch denselben die Linie bl als neue Umdrehungsachse und zugleich als Eine der neuen Coordinatenachsen ($X_{,,}$) gelegt. Die beiden andern Achsen können nun, ohne $X_{,,}$ zu ändern, noch auf unendlich viele Arten angenommen werden. Um dieselben näher zu bestimmen, lege man durch die neue

Achse b l und durch b d (Z) eine Ebene, und erweitere sie, bis sie die Ebene a b c (X Y) schneidet. Ist b s diese Durchschnittslinie, so errichte man in der Ebene a b c auf dieselbe (b s) eine senkrechte b t, so daß $\angle$ t b s = R. Ueberdem errichte man in der Ebene l b d oder s b d auf die neue Umdrehungsachse b l auch eine senkrechte b e, daß also auch $\angle$ e b l = R. Man nehme nun neben der Umdrehungsachse b l noch die Linien b t und b e zu Coordinatenachsen, die erste als $Y_{,,}$, die zweite als $Z_{,,}$ an. Da nämlich die Linie b d, also auch die Ebene d b l oder d b s senkrecht auf c b a, so ist b t, welches senkrecht auf b s, auch senkrecht auf der Ebene d b s oder e b s (Geomet. §. 192.), also auf allen Linien dieser Ebene (Geomet. §. 187. Zus. 1.), folglich auch auf b l und b e. Da nun vermöge der Construction b e senkrecht auf b l, so stellen b l, b t, b e ein System von drei aufeinander senkrechten Coordinatenachsen dar. Die Lage derselben ist durch die der neuen Umdrehungsachse b l, und die dieser letztern durch die Winkel a b s, s b l *) bestimmt. Man setze den ersten (a b s) = α, den zweiten (s b l) = β. Ist nun o irgend ein willkührlicher Punkt des Körpers, so nehme man, um die Coordinaten $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ desselben in Beziehung auf die neuen Achsen (b l, b t, b e) durch die in Beziehung auf die alten (b a, b c, b d) auszudrücken, fürs erste die Durchschnittslinie b s zur Abscissenachse ($X_{,}$), und die Linie b t zur zweiten Coordinatenachse ($Y_{,}$) an. Alsdann muß man nothwendig b d, welches auf der Ebene t b s oder auf beiden Achsen b s, b t senkrecht steht, zur dritten Coordinatenachse ($Z_{,}$) annehmen. Zieht man daher durch o eine Linie oδ ⋕ b d, und verlängert sie bis an die Ebene a b c bei δ, so ist oδ die Coordinate von o sowohl in Beziehung auf Z, als auf $Z_{,}$. Zieht man ferner δ n ⋕ b c, $\delta\varphi$ ⋕ b t, bis es b s bei φ schneidet, so sind b n, n l die Coordinaten (x, y) von o in Beziehung auf die alten Achsen, und bφ, $\delta\varphi$ die Coordina-

*) Es versteht sich, daß außer der Größe der Winkel a b s, s b l auch noch bestimmt seyn muß, auf welcher Seite von b a der erstere, und auf welcher von a b c der zweite liegt.

ten (x, y,) desselben Punktes in Beziehung auf die Achsen bs, bt. Man hat daher

1) $o\delta = z, = z.$

Ferner, wie aus der Lehre *) von der Verwandlung der Coordinaten bekannt ist,

2) $x, = x \cos. \alpha + y, \sin. \alpha,$

3) $y, = y . \cos. \alpha - x \sin. \alpha.$

Nimmt man nun wieder bl zur ersten Coordinatenachse (X,,),

---

*) Die Lehre von der Verwandlung der Coordinaten gehört eigentlich in die analytische Geometrie. Um indessen die Anfänger, die mit den Grundsätzen derselben nicht hinreichend vertraut seyn möchten, in Stand zu setzen, das Folgende gehörig zu verstehn, so seyen ba, bc (fig. 58.) zwei rechtwinkelige Coordinatenachsen X, Y. Durch den Durchschnittspunkt b und in der Ebene derselben seyen zwei andere sich ebenfalls rechtwinkelig schneidende Coordinatenachsen bl, bt (X,, Y,) gezogen. Man setze $\angle abl = \alpha$. Ist nun δ irgend ein Punkt in der Ebene bac, so sind δn, bn das y, x, und $\delta\varphi$, $b\varphi$ das y,, x, dieses Punktes (δ). Nun ist

1) $x = bn = be - ne = be - m\varphi.$

Ferner ist

2) $b\varphi : be = 1 : \cos. \alpha;$

oder (da $b\varphi = x,$)

3) $be = x,. \cos. \alpha.$

Nun ist auch $\angle m\delta\varphi = \alpha$, also

4) $\delta\varphi : m\varphi = 1 : \sin. \alpha,$

5) $m\varphi = y,. \sin. \alpha.$

Folglich 6) $bn = x = x, \cos. \alpha - y, \sin. \alpha.$

Ferner ist

7) $b\varphi : \varphi e = x, : \varphi e = 1 : \sin. \alpha,$

8) $\delta\varphi : \delta m = y, : \delta m = 1 : \cos. \alpha.$

Also 9) $\varphi e = x,. \sin. \alpha,$

10) $\delta m = y, \cos. \alpha,$

11) $y = \delta n = \delta m + mn = \delta m + \varphi e$, oder

12) $y = x, \sin. \alpha + y, \cos. \alpha.$

Man multiplicire 6) mit $\cos. \alpha$ und 12) mit $\sin. \alpha$, und addire beide, so erhält man (wenn man bedenkt, daß $\cos. \alpha^2 + \sin. \alpha^2 = 1$)

13) $x \cos. \alpha + y . \sin. \alpha = x.$

Multiplicirt man 6) mit $\sin. \alpha$, und 12) mit $\cos. \alpha$, und subtrahirt 6) von 12), so erhält man

14) $y \cos. \alpha - x \sin. = \alpha \;\; y,.$

und zur zweiten ($Z_{,,}$) die Linie b e an, so muß man b t zur dritten ($Y_{,,}$) nehmen. Nennt man die Coordinaten des Punktes o in Beziehung auf diese neuen Achsen b l, b e, b t, der Ordnung nach $x_{,,}$; $z_{,,}$; $y_{,,}$; so ist zuerst, da die Achse b t aus dem vorigen System beibehalten wird,

4) $y_{,,} = y_{,}$.

Ferner erhält man durch die Verwandelung der Coordinaten in der Ebene s b e

5) $x_{,,} = x_{,} \cos. \beta + z_{,} \sin. \beta$,

6) $z_{,,} = z_{,} \cos. \beta - x_{,} \sin. \beta$.

Setzt man in 4) 5) 6) statt $x_{,}$; $y_{,}$; z die 1) 2) 3) angegebenen Werthe, so erhält man

7) $y_{,,} = y \cdot \cos. \alpha - x \sin. \alpha$,

8) $z_{,,} = z \cos. \beta - x \cos. \alpha . \sin. \beta - y . \sin. \alpha . \sin. \beta$,

9) $x_{,,} = x \cos. \alpha . \cos. \beta + y . \sin. \alpha . \cos. \beta + z . \sin. \beta$.

Aus diesen Werthen ergibt sich ferner

10) $P x_{,,} y_{,,} = - P x^2 \sin. \alpha . \cos. \alpha . \cos. \beta + P y^2 \sin. \alpha . \cos. \alpha . \cos. \beta + P y x (\cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^2) \cos. \beta - P x z \sin. \alpha . \sin. \beta + P y z \cos. \alpha . \sin. \beta$.

11) $P x_{,,} z_{,,} = - P x^2 \cos. \alpha^2 . \sin. \beta . \cos. \beta - P y^2 \sin. \alpha^2 . \sin. \beta . \cos. \beta + P z^2 . \sin. \beta . \cos. \beta - 2 P x y \sin. \alpha . \cos. \alpha . \sin. \beta . \cos. \beta + P x z \cos. \alpha (\cos. \beta^2 - \sin. \beta^2) + P y z \sin. \alpha (\cos. \beta^2 - \sin. \beta^2)$.

Setzt man $S . P x^2 = A$, $S . P y^2 = B$, $S . P z^2 = C$, $S . P . x y = D$, $S . P x z = E$, $S . P y z = F$, so erhält man aus 10) und 11)

12) $S . P x_{,,} y_{,,} = - A \sin. \alpha . \cos. \alpha . \cos. \beta + B . \sin. \alpha . \cos. \alpha . \cos. \beta + D (\cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^2) \cos. \beta - E \sin. \alpha . \sin. \beta + F \cos. \alpha . \sin. \beta$.

13) $S . P x_{,,} z_{,,} = - A \cos. \alpha^2 . \sin. \beta . \cos. \beta - B \sin. \alpha^2 . \sin. \beta . \cos. \beta + C \sin. \beta . \cos. \beta - 2 D \sin. \alpha . \cos. \alpha . \sin. \beta . \cos. \beta + E \cos. \alpha (\cos. \beta^2 - \sin. \beta^2) + F \sin. \alpha (\cos. \beta^2 - \sin. \beta^2)$.

Für einen bestimmten Körper und für drei bestimmte Achsen (b a, b c, b d) sind die Werthe von (A, B ... F) bestimmte

Größen. Die Werthe von $S.Px_{,,}y_{,,}$; $S.Py_{,,}z_{,,}$ verändern sich also nur noch mit denjenigen von α und β. Es ist also zu untersuchen, ob diese letztern nicht so angenommen werden können, daß dabei $S.Px_{,,}y_{,,}$; $S.Px_{,,}z_{,,} = o$ werden. Setzt man in 12) Alles auf der rechten Seite befindliche $= o$, so erhält man, wenn man alle Glieder durch $\cos.\beta$ dividirt, und bemerkt, daß $\frac{\sin.\beta}{\cos.\beta} = tg.\beta$,

$$14)\ tg.\beta = \frac{-(A-B)\sin.\alpha.\cos.\alpha + D(\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)}{E\sin.\alpha - F\cos.\alpha.}$$

Setzt man eben so in 13) die rechte Seite $= o$, dividirt alle Glieder durch $\cos.\beta^2 - \sin.\beta^2$, und bemerkt, daß $\cos.\beta^2 - \sin.\beta^2 = \cos.2\beta$, $2.\sin.\beta.\cos.\beta = \sin.2\beta$, also $\frac{2.\sin.\beta.\cos.\beta}{\cos.\beta^2 - \sin.\beta^2} = tg\,2\beta$, so erhält man

$$15)\ tg\,2\beta = \frac{2E\cos.\alpha + 2F\sin.\alpha}{A\cos\alpha^2 + B\sin.\alpha^2 - C + 2D\sin.\alpha.\cos.\alpha}$$

Da $tg\,2\beta = \frac{2tg\beta}{1 - tg\beta^2}$ (Geomet. §. 296.), so erhält man aus 14)

$$16)\ tg\,2\beta = \frac{2[E\sin.\alpha - F\cos.\alpha][(B-A)\sin.\alpha\cos.\alpha + D(\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)]^2}{(E\sin.\alpha - F\cos.\alpha)^2 - [(B-A)\sin.\alpha.\cos.\alpha + D(\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)]^2}$$

Setzt man die 15) 16) erhaltenen Werthe von $tg\,2\beta$ einander gleich, so erhält man

$$\begin{aligned}17)\ &[E\cos.\alpha + F\sin.\alpha]\,[(E\sin.\alpha - F\cos.\alpha)^2] = \\ &= (E\cos.\alpha + F\sin.\alpha)\,[(B-A).\sin.\alpha.\cos.\alpha + \\ &+ D(\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)]^2 + (E\sin.\alpha - F\cos.\alpha) \\ &[(B-A)\sin.\alpha.\cos.\alpha + D(\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)] \\ &[A\cos.\alpha^2 + B\sin.\alpha^2 - C + 2D\sin.\alpha.\cos.\alpha].\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung besteht aus zwei Gliedern, wovon jedes den Factor $(B-A)\sin.\alpha.\cos.\alpha + D(\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)$ hat. Man kann dieselbe folglich in zwei Factoren auflösen. Hierdurch erhält man nach gehöriger Rechnung

18) $(E \cos.\alpha + F \sin.\alpha)((E \sin.\alpha - F \cos.\alpha)^2) =$
$= [(B - A) \sin.\alpha . \cos.\alpha + D (\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)]$
$[E (B \sin.\alpha - C \sin.\alpha + D \cos.\alpha) - F (A \cos.\alpha -$
$- C \cos.\alpha + D \sin.\alpha)]$.

Dividirt man hierin auf beiden Seiten durch $\cos.\alpha^3$, so erhält man, wenn $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = \text{tg}\,\alpha = u$ gesetzt wird,

19) $(E + F u)(F - E u)^2 = [D + (B - A) u - D u^2]$
$[D E - A F + C F + (B E - C E - D F) u]$.

Diese Gleichung, auf o gebracht, gibt nach gehöriger Rechnung

20) $o = E F^2 - D^2 E + (A - C) D F + u [F^3 -$
$- 2 E^2 F + D^2 F + (A - 2 B + C) D E -$
$- (A - B)(A - C) F] + u^2 [E^3 - 2 E^2 F +$
$+ D^2 E + (B - 2 A + C) D F + (A - B)(B - C) E] +$
$+ u^3 [E^2 F - D^2 F + (B - C) D E]$.

Die Gleichung 20) ist vom dritten Grade in Beziehung auf u oder $\text{tg}\,\alpha$. Dieselbe hat also, wie alle Cubischen Gleichungen (Buchstabenrechenk. Th. II. §. 159) wenigstens Eine mögliche Wurzel, wodurch man also für α wenigstens Einen möglichen Werth erhält. *) Aus demselben ergibt sich aber der zugehörige Werth von β aus 14), oder

21) $\text{tg}\,\beta = \frac{-(A-B) \sin.\alpha . \cos.\alpha + D (\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)}{E \sin.\alpha - F \cos.\alpha} =$
$= - \frac{\frac{1}{2}(A - B) \sin.2\alpha + D \cos.2\alpha}{E \sin.\alpha - F \cos.\alpha}$.

Aus den Werthen von α und β ergibt sich immer die Lage einer freien Achse. Man kann indessen außer derselben immer wenigstens noch zwei andere finden. Nimmt man nämlich diese freie Achse selbst zur Coordinatenachse X an, und verbindet mit derselben unter rechten Winkeln zwei andere Achsen Y, Z, so kann man für dieses neue Coordinatensystem ebenfalls

---

*) Den Fall einzig abgerechnet, wo in 20) der Coefficient von u^3 Null wird, d. h. wo $E^2 F - D^2 . F + (B - C) D E = o$; wodurch das Glied, welches u^3 enthält, wegfällt. Von diesem Fall wird in der Anmerkung näher gehandelt, und gezeigt werden, daß man auch alsdann immer drei freie Achsen finden kann.

die Werthe suchen, die α und β für eine freie Achse haben müssen. Bezieht man die Buchstaben α, β, A, B... F auf diese neue Achsen, so erhält man, wenn man bedenkt, daß, da X eine freie Achse ist, $D = S.Pxy = o$, $E = S.Pxz = o$, aus 12) und 13)

$$22)\ (B - A) \sin.\alpha.\cos.\alpha.\cos.\beta + F\cos.\alpha.\sin.\beta = o.$$

$$23) - (A\cos.\alpha^2 + B\sin.\alpha^2)\sin.\beta.\cos.\beta + C\sin.\beta.\cos.\beta + F.\sin.\alpha(\cos.\beta^2 - \sin.\beta^2) = o.$$

Der Ersten dieser Gleichungen geschieht ein Genügen, wenn man $\cos.\alpha = o$, also $\alpha = 90^0$ und $\sin.\alpha = 1$ nimmt. Diese Werthe in 23) substituirt, geben

$$24) - B\sin.\beta.\cos.\beta + C\sin.\beta.\cos.\beta + F(\cos.\beta^2 - \sin.\beta^2) = o,$$

oder $25)\ \frac{1}{2}(C - B)\sin.2\beta + F\cos.2\beta = o$,

$$26)\ \frac{\sin.2\beta}{\cos.2\beta} = tg\,2\beta = -\frac{F}{\frac{1}{2}(B - C)}\ ^{*)}.$$

Hieraus ergibt sich ein doppelter Werth von β, nämlich einer $= \delta$ und ein anderer $= (90^0 + \delta)$; indem zu 2δ und zu $2(90^0 + \delta)$ oder zu $180 + 2\delta$ dieselbe Tangente gehört. Man erhält also noch zwei freie Achsen, welche beide untereinander einen Winkel $(90^0 + \delta) - \delta = 90^0$ machen, also aufeinander senkrecht stehen. Da überdem aus 23) $\cos.\alpha = o$ oder $\alpha = 90^0$, so steht die Achse X (die schon gefundene freie Achse) senkrecht auf der Ebene, worin die beiden andern freien Achsen liegen, oder diese drei freien Achsen bilden ein System von drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen. —

Zusatz 1. Es gibt also in jedem Körper wenigstens drei freie Achsen. Ist für Ein System freier Achsen $A = B = C$, so sind alle durch den Schwerpunkt gezogene Achsen freie Achsen. In diesem Falle sind nämlich die Ausdrücke für $S.P.x_{,,}y_{,,}$; $S.P\,x_{,,}z_{,,}$ (§. 91, 12, 13) allezeit $= o$, wie man auch α

*) Wenn $F = o$ und $B = C$, so scheint zwar der Werth von $tg\,2\beta = \frac{o}{o}$ unbestimmt zu werden. Aber man braucht in diesem Falle nur $\cos.\alpha = o$, oder $\alpha = 90^0$ zu nehmen, so geschieht den Gleichungen 22) 23) durch jeden beliebigen Werth von β ein Genügen.

und β annehmen mag. *) Ist für ein System freier Achsen nur $B = C$, so geschieht den Gleichungen (22, 23, §. 91.) ein Genügen, wenn man $\cos. \alpha = 0$, oder $\alpha = 90^0$, und dabei den Werth von β, wie man will, annimmt. Daher sind in diesem Falle alle Achsen, welche in einer durch den Schwerpunkt auf die Achse X senkrechten Ebene liegen, und durch den Schwerpunkt gehn, freie Achsen. — Sind aber für ein System freier Achsen (b a, b c, b d) die Werthe A, B, C alle drei ungleich, so gibt es außer diesen drei keine freie Achse des Körpers. In diesem Falle können nämlich die Ausdrücke (12, 13, §. 91) nur Null werden, wenn entweder $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, oder $\alpha = 90^0$ und $\beta = 0$, oder $\beta = 90^0$ und α willkührlich angenommen wird, wodurch man aber auf die Achsen X, Y, Z, als die einzigen freien, zurückkommt.

Zusatz. 2. Wir haben zwar im Vorigen angenommen, daß der Durchschnittspunkt b (fig. 43.) der Schwerpunkt des Körpers sey. Allein bei der Bestimmung der Lage, welche die Achse haben muß, damit $S.(P.x_{,,}y_{,,}) = S.(Px_{,,}z_{,,}) = 0$ werde, ist nicht das Mindeste zum Grunde gelegt, weßhalb b der Schwerpunkt seyn müsse. Dasselbe, was wir in Beziehung auf den Schwerpunkt bewiesen haben, gilt also für jeden Punkt des Körpers. Man kann daher durch jeden Punkt eines jeden Körpers wenigstens drei sich rechtwinkelig schneidende Achsen (X, Y, Z) legen, für welche $S.Pxy = 0$, $S.Pxz = 0$, $S.Pyz = 0$. Diese sind diejenigen, welche wir oben (§. 74.) bei der Untersuchung über das Moment der Trägheit die (mechanischen) Hauptachsen genannt, und deren Existenz wir daselbst später zu beweisen versprochen haben. Es gibt deren für jeden Körper unzählige. Allein nur die durch den Schwerpunkt laufenden sind wirklich freie Achsen, d. h. solche, welche durch die Wirkung der Schwungkräfte gar keine Gewalt leiden (§. 90.). Für jede andere Achse, die nicht durch den Schwerpunkt geht, lassen sich die Schwungkräfte auf $\frac{\gamma^2.M.b}{g}$, $\frac{\gamma^2.M.c}{g}$ (§. 90.23, 24) bringen, welche

*) Da alle drei Achsen freie sind, so ist in (§. 90. 12, 13) von selbst $D = E = F = 0$.

beide an der Achse X selbst, die erste parallel mit Y, die zweite mit Z angebracht werden muß. Ist dabei die Achse (X) eine Hauptachse, so sind die Coordinaten a, a′ (§. 90. 25, 26), der Punkte, wo die beiden eben genannten Kräfte angebracht werden müssen, in Beziehung auf X = o, indem in den beiden Ausdrücken für a, a′ (§. 90) der Zähler = o, und der Nenner eine bestimmte Größe ist. Die beiden Kräfte, da ihre Richtungen sich schneiden, haben nothwendig eine Resultirende, deren Richtung durch den Anfangspunkt der Achsen geht. Wird an demselben eine der Resultirenden gleiche und entgegengesetzte Kraft angebracht, so erleidet er, und eben so jeder andere Punkt der Achse, durch die Schwungkräfte weiter keinen Druck. Der Körper wird folglich alsdann seine Umdrehung um die Achse mit derselben Winkelgeschwindigkeit fortsetzen. Hat also ein Körper eine Umdrehung um irgend eine seiner Hauptachsen erhalten, so braucht dieselbe, wenn sie zugleich durch den Schwerpunkt geht, gar nicht, und wenn sie nicht durch den Schwerpunkt geht, so braucht nur Ein Punkt derselben, nämlich der Durchschnittspunkt der drei Hauptachsen, gehalten zu werden, damit der Körper seine Umdrehung um dieselbe Achse fortsetze.

Anmerk. 1. Der Beweis des höchst wichtigen und merkwürdigen Satzes, daß es für jeden Körper wenigstens drei freie Achsen gibt, die sich im Schwerpunkt schneiden, beruht darauf, daß die Gleichung (20, §. 91.) eine Cubische ist, welche, wie aus der Algebra bekannt ist, nothwendig Eine mögliche Wurzel hat. Indessen könnte in der angeführten Gleichung (20, §. 91.) wohl der Coefficient von u^3 Null werden, wodurch u^3 aus der Gleichung wegfiele, und dieselbe folglich aufhörte, eine Cubische zu seyn.*). Um sich zu überzeugen, daß es auch in diesem Falle wenigstens drei sich im Schwerpunkt schneidende Achsen der freien Umdrehung gibt, bemerke man:

1. Die ganze Schwierigkeit fällt weg, wenn von den drei Größen D, E, F zwei = o. Denn in diesem Falle ist eine der drei (geometrischen) Achsen X, Y, Z selbst eine freie Achse, wo sich denn die beiden andern nach (22, 23, §. 91.) ergeben.

*) Dieses ist insbesondere der Fall, wenn A = B = C und D = E = F, in welchem Falle sich alle Glieder der Gleichung (20, §. 91.) von selbst aufheben.

II. Die Achsen $b a$, $b c$, $b d$ (X, Y, Z) (fig. 43.), wogegen die Lage der freien Achse $b l$, oder die Winkel $a b s = \alpha$, $l b s = \beta$ gesucht worden, sind ganz willkührlich angenommen, und nur der Bedingung unterworfen worden, daß sie durch den Schwerpunkt gehn und rechte Winkel untereinander machen. Wenn sich also unter allen, durch den Punkt b möglichen rechtwinkeligen Achsensystemen nur ein einziges finden läßt, wofür der Coefficient von u^3 (§. 91, 20) nicht $= o$, so findet man aus dieser Gleichung eine freie Achse. Insbesondere ist zu bemerken, daß man auch jede der beiden andern Achsen Y, Z zur Achse X annehmen kann. Man projicire, so wie im Vorigen, die neue Achse $b l$ ($X_{,,}$) (fig. 43.) auf die Ebene $a b c$ nach $b s$, nehme dabei die Verlängerung $b g$ von $b t$ zur Achse $Y_{,,}$ an, rechne den Winkel α nicht von $b a$, sondern von $b c$ an, d. h. man setze $c b s = \alpha$, und lasse alles Uebrige wie vorhin. Hierbei wird nur die erste Achse X mit der zweiten Y vertauscht, die dritte Achse aber, so wie auch der Winkel β bleibt ungeändert. Bildet man nun den Coefficient von $tg\,\alpha^3$ oder u^3, in Beziehung auf das neue α oder auf $c b s$ und auf $b c$ (Y) als Umdrehungsachse, so wird, wie man aus (§. 91. 20) durch gehörige Verwechselung der Buchstaben (A, $B \ldots F$) leicht findet, dieser Coefficient von u^3 (1) $= F^2 E - D^2 E + (A - C) F . D$. In der Gleichung (§. 91, 20) war derselbe in Beziehung auf X, (2) $= E^2 F - D^2 F + (B - C) D E$. Ist von den Coefficienten (1) (2) Einer nicht $= o$, so bleibt alles (§. 91.) Gesagte bestehen.

III. Sind die Coefficienten (1) (2) beide $= o$, und von den Größen D, E, F keine zwei $= o$ (siehe I.), so nehme man in der Achse X (fig. 43.) einen andern Punkt ε zum Anfangspunkt an, ziehe durch denselben mit Y und Z Parallelen, und bezeichne die neuen, sich dadurch ergebenden Achsen durch X', Y', Z'. Ist nun $b\varepsilon = h$, so hat man, wenn man die Coordinaten irgend eines Punktes des Körpers in Beziehung auf die neuen Achsen durch x', y', z' bezeichnet,

$$3)\ x' = x + h$$
$$4)\ y' = y$$
$$5)\ z' = z.$$

Hierdurch erhält man $S . P\, x'^2 = S . P\, (x + h)^2 = S . P\, x^2 + 2 S . P h x + S . P h^2$, oder (da $2 S P h x = 2 h S . P x = o$, indem b der Schwerpunkt) auch $S . P h^2 = h^2 M$, wenn das Gewicht des Körpers $= M$ gesetzt wird, $S . P\, x'^2 = A + h^2 M$. Verfährt man in Beziehung auf die andern Ausdrücke $S . P\, y'^2$, $S . P\, x' y'$ u. s. f. eben so, so erhält man, wenn man die Werthe, welche A, $B \ldots F$ für die

neuen Achsen (X', Y', Z') annehmen, durch A', B' . . . F' bezeichnet,

$$6)\ S.Px'^2 = A' = A + h^2 M,$$
$$7)\ S.Py'^2 = B' = B,$$
$$8)\ S.Pz'^2 = C' = C,$$
$$9)\ S.Px'y' = D' = S.Pxy + S.Phy = D\ ^{*)}.$$
$$10)\ S.Px'z' = E' = S.Pxz + S.Phz = E.$$
$$11)\ S.Py'z' = F' = S.Pyz = F.$$

Von den drei Werthen D', E', F' können keine zwei $= o$ seyn, (indem sonst von D, E, F auch zwei $= o$ wären, also wenigstens Eine der drei Achsen X, Y, Z eine freie wäre. Daher kann auch von den drei Achsen X', Y', Z' keine eine mechanische Hauptachse seyn. Allein man kann durch den Durchschnittspunkt ε derselben eine neue Achse X'' ziehn, und die Lage dieser letztern so zu bestimmen suchen, daß sie eine mechanische Hauptachse wird. Denkt man sich dieselbe (X'') auf die Ebene X' Y' projicirt, setzt den Winkel, den die Projection mit Y' macht, $= \alpha$, $tg\alpha = u$, so findet man den Werth des Coefficienten von u^3 (§. 91. 20) in Beziehung auf Y' aus (II. 1.), wenn man nur in diesem letztern A, C, F, D, E mit A', . . . E' verwechselt. Allein hierbei behalten alle in demselben (II. 1.) vorkommenden Buchstaben ihren Werth, A einzig abgerechnet, welches sich in $A + h^2 M$ (6) verwandelt. Daher kann, wenn von den drei Werthen D, E, F nicht zwei Null sind (siehe I.), der Coefficient (1) von u^3 für die neue Achse Y' nicht Null werden. Die Gleichung (20, §. 91) ist also für diese Achse wirklich eine vom dritten Grade, aus welcher sich für α nothwendig ein möglicher Werth ergibt, wodurch man denn das ganze Verfahren, so wie (§. 91.) gelehrt worden, ausführen, und noch zwei andere mechanische Hauptachsen Y'', Z'' finden kann. Diese drei neuen Achsen X'', Y'', Z'' sind keine eigentlichen freien Achsen (indem sie nicht durch den Schwerpunkt gehn), sondern nur drei (mechanische) Hauptachsen, wofür nämlich die Werthe $S.Px''y'' = o$, $S.Px''z'' = o$, $S.Py''z'' = o$. Wir wollen diese letztern Werthe durch D'', F'', E'', und eben so $S.Px''^2$, $S.Py''^2$, $S.Pz''^2$ durch A'', B'', C'' bezeichnen. Von den Achsen X'', Y'', Z'' kann keine mit einer der Achsen X, Y, Z parallel seyn. Denn wäre dieses, so fiele wenigstens Eine Achse des zweiten Systems (X', Y' Z') mit Einer des dritten (X'', Y'', Z'') zusammen, d. h. Eine der Achsen X', Y', Z' wäre eine Hauptachse, welches, wie so eben bemerkt worden, nicht seyn kann. Daher geht keine der drei Achsen X'', Y'', Z'' durch den Schwerpunkt b.

---

*) Weil b der Schwerpunkt, so ist sowohl $S.P.y$ als $S.Pz = o$.

VI. Man denke sich nun mit jeder der drei gefundenen Hauptachsen (X'', Y'', Z'') durch den Schwerpunkt eine Parallele X''', Y''', Z''' gezogen, und bezeichne die Coordinaten der verschiedenen Punkte in Beziehung auf dieses letztere Achsensystem durch x''', y''', z''', und eben so die Werthe (A, $B \ldots F$) in Beziehung auf dasselbe durch (A''', $B''' \ldots F'''$). Sind die Coordinaten des Schwerpunktes b (fig. 43.) in Beziehung auf die drei schon gefundenen Hauptachsen (X'', Y'', Z'') der Ordnung nach p, q, r, so ist $x''' = x'' - p$, $y''' = y'' - q$, $z''' = z'' - r$, also $S.P.x'''^2 = S.P\,x''^2 - 2\,S.P.p\,x'' + S.P\,p^2$. Aber, da b (fig. 43.) der Schwerpunkt, und die Coordinate desselben (in Beziehung auf die Achse X'') $= p$, so ist $S.P\,x'' = M\,p$, also $S.P\,p\,x'' = Mp^2$. Ueberdem $S.P\,p^2 = M\,p^2$. Hierdurch erhält man, wenn man bedenkt, daß in Beziehung auf Y'', Z'' dasselbe gilt,

12) $S.P\,x'''^2 = A''' = A'' - M\,p^2$,

13) $S.P\,y'''^2 = B''' = B'' - M\,q^2$,

14) $S.P\,z'''^2 = C''' = C'' - M\,r^2$,

15) $S.P\,x'''y''' = D''' = D'' - pqM = -pqM$,*)

16) $E''' = E'' - prM = -prM$,*)

17) $F''' = F'' - qrM = -qrM$,*)

Man kann nun durch den Durchschnittspunkt dieser letzten Achsen (X''', Y''', Z''') oder durch den Schwerpunkt wieder eine neue Achse ziehn, und ihre Lage so bestimmen, daß sie eine Hauptachse wird. Bildet man nämlich aus den so eben gefundenen Werthen (12 — 17) den Coefficienten von u^3 (§. 91. 20.) in Beziehung auf X''', so wird derselbe =

18) $= (-p^2 r^3 q + p^2 q^3 r)\,M^3 + (B'' - C'' + M(r^2 - q^2))\,p^2\,q\,r\,M^2 = (B'' - C'')\,p^2\,q\,r\,M^2$.

Eben so wird derselbe Coefficient, wenn man ihn auf die Achse Y''' bezieht aus (II. 1.)

19) $= (-q^2 r^3 p + p^3 q^2 r)\,M^3 + (A'' - C'' + M(r^2 - p^2)\,p\,q^2\,r\,M^2 = (A'' - C'')\,p\,q^2\,r\,M^2$.

Da von den Achsen X'', Y'', Z'' keine durch den Schwerpunkt b geht (V), so ist von den Coordinaten des letztern in Beziehung auf diese Achsen, oder von den Werthen p, q, r keiner = o. Die Werthe (18) (19) können daher nur dann beide = o seyn, wenn $B'' - C'' = o$, und zugleich $A'' - C'' = o$, d. h. wenn A'', $= B''$, $= C''$. Allein in diesem Falle sind alle durch den Punkt ε gezogene Achsen Hauptachsen (§. 91. Zus. 1.) Daher wäre die durch ε und b gezogene, d. h. die Achse X' oder X

*) Nämlich, da X'', Y'', Z'' Hauptachsen, so ist $D'' = E'' = F'' = o$

auch eine Hauptachse, und da sie durch den Schwerpunkt geht, auch eine freie Achse, wider die Voraussetzung, daß nämlich von den drei zuerst gewählten Achsen (X, Y, Z) keine eine freie ist. Daher können die Werthe A'', B'', C'' nicht alle drei gleich, folglich (18) (19) nicht beide $= 0$ seyn. — Man kann also, wenn unter den drei Achsen irgend eines im Schwerpunkt willkührlich angenommenen Achsensystems (X, Y, Z) keine einzige eine freie ist, in demselben (Schwerpunkt) allezeit ein anderes Achsensystem (X''', Y''', Z''') so annehmen, daß für Eine dieser Achsen der Coefficient von u^3 (§. 91. 20.) nicht $= 0$, also die Gleichung (§. 91. 20.) wirklich eine vom dritten Grade wird, wodurch sich denn alles (§. 91.) ferner Gesagte ebenfalls anwenden und beweisen läßt, daß man durch den Schwerpunkt eines jeden Körpers wenigstens drei freie Achsen, die sich unter rechten Winkeln schneiden, ziehn kann.

Anmerk. 2. Der (vorig. §.) vorgetragene wichtige Satz, daß es in jedem Körper wenigstens drei freie Achsen gibt, ward zuerst von einem deutschen Mathematiker v. Segner gefunden, der ihn in einer zu Halle im Jahr 1755 erschienenen kleinen Schrift: Specimen theoriae turbinum bekannt machte. Der große Mathematiker Leonhard Euler benutzte diese neue Entdeckung mit dem größten Erfolg, und machte sie in seiner Schrift: theoria motus corporum rigidorum seu solidorum zur Grundlage der ganzen Mechanik der festen Körper, die eine bestimmte Ausdehnung haben. Man kann nämlich die eigentliche Mechanik füglich in zwei Theile theilen, und in dem ersten die fortschreitende Bewegung, (wobei alle Punkte des Körpers nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit fortgehn), in dem zweiten aber die Umdrehungsbewegung, wobei die verschiedenen Punkte des Körpers sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten um eine feste oder bewegliche Achse drehn, betrachten. Man könnte den ersten Theil *), die Mechanik der Punkte, und den zweiten die Mechanik der Körper nennen. — Dem ersten dient das von Galilei entdeckte Gesetz, daß beim freien Fall sich die durchlaufenen Räume, wie die Quadrate der Zeiten verhalten, zur Hauptgrundlage. Für den zweiten ist die Entdeckung Segner's (§. 91.) eben so wichtig. Selbst wenn ein Körper von Kräften um eine völlig feste Achse bewegt wird, ist der Satz (§. 91.) für die Auffindung des Momentes der Trägheit von dem größten Nutzen. Allein die

*) Leonh. Euler hat den ersten Theil in seiner theoria motus analytice exposita und den zweiten in dem so eben angeführten Werk: theoria motus corporum rigidorum seu solidorum abgehandelt.

Lehre von der Bewegung der Körper um bewegliche Achsen, überhaupt die von der Bewegung ganz freier Körper, worauf an willkührlichen Punkten Kräfte wirken, ist ganz auf Segner's Entdeckung gegründet. — Noch andere wichtige Eigenschaften der (mechanischen) Hauptachsen findet man in: Memoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanens de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes par M. Ampere. Paris 1823.

§. 92.

Wenn auf einen, um eine feste Achse beweglichen Körper eine Kraft wirkt, deren Richtung in einer auf der Achse senkrechten Ebene liegt*), so kann man sowohl die Umdrehungsbeschleunigung, als auch die wirkliche Geschwindigkeit, die dadurch jeder Punkt des Körpers erhält, so wie im Vorigen näher gezeigt worden, finden. Die Umdrehungsbeschleunigung mag nun aber in jedem Zeitpunkt beschaffen seyn, wie man will, so kann man immer für jedes Element des Körpers eine Kraft angeben, die, wenn sie unmittelbar an dem Element selbst, und zwar immer nach der Richtung der Tangente des Kreises, den das Element bei der Umdrehung beschreibt, wirkte, die Umdrehung desselben eben so beschleunigen würde, wie dieses wegen seines Zusammenhanges mit den übrigen Theilen des Körpers, durch eine an einem Punkte des Körpers angebrachte Kraft, oder auch durch mehrere solcher Kräfte in jedem Zeitpunkt wirklich geschieht. Kräfte, welche, wenn sie an den Elementen des Körpers unmittelbar angebracht würden, jedem derselben die nämliche Bewegung ertheilten, die es durch die an dem Körper angebrachten Kräfte wirklich erhält, heißen die zu dieser Bewegung gehörigen Elementarkräfte. Wirkte auf jedes Element die zugehörige Elementarkraft, (und zwar immer nach der Richtung der Tangente), so würde, wenn sonst

*) Sollte die Richtung einer Kraft nicht in einer auf die Achse senkrechten Ebene liegen, so könnte man sie in zwei, wo die Richtung der Einen wirklich in einer solchen Ebene läge, und die der andern auf dieser Ebene senkrecht stände, also mit der Achse parallel wäre, zerlegen. Diese letztere trüge zur Umdrehung nichts bei, und ihre Wirkung auf die Achse müßte nach (Th. I. §. 50.) beurtheilt werden.

keine Kraft auf den Körper wirkte, die Bewegung Eines Elements durch die der andern weder beschleunigt noch verzögert. Die Elemente würden vielmehr, wenn sie auch gar nicht untereinander zusammenhingen, sich gerade eben so, als ob dieses der Fall wäre, bewegen, wenn jedes nur wegen der Schwungkraft (etwa durch einen festen Faden) mit der Achse zusammenhinge, oder von einer der jedesmaligen Schwungkraft gleichen Kraft nach der Achse getrieben würde. Wenn also an allen Elementen eines Körpers diese Elementarkräfte angebracht wären, so würde sich der Körper um die feste Achse eben so drehn, als es durch die Kräfte, die in der That auf ihn wirken, geschieht, und zwar, ohne daß dadurch die feste Achse eine andere Gewalt, als von der Wirkung der Schwungkräfte erlitte. Um nun den Druck zu bestimmen, den die feste Achse erleidet, wenn der Körper durch eine an einem bestimmten Punkt desselben wirkende absolute Kraft V (deren Richtung nach der Tangente des Kreises geht, den der Punkt, wo V angebracht ist, beschreibt) eine Umdrehung erhält; so suche man die zu der Kraft V gehörige Umdrehungsbeschleunigung, und denke sich die dazu gehörige Elementarkraft an jedem Elemente zweimal, einmal nach der Richtung, nach welcher es von der Kraft V bewegt wird, und einmal nach der gerade entgegengesetzten angebracht. Da die so hinzugefügten Elementarkräfte sich an jedem Elemente von selbst aufheben, so kann durch Hinzufügung derselben weder in der Umdrehung des Körpers, noch in dem Druck, den die Achse erleidet, eine Aenderung hervorgebracht werden. Betrachtet man denjenigen Theil der hinzugefügten Elementarkräfte besonders, deren Richtung derjenigen, nach welcher der Körper sich wirklich dreht, entgegengesetzt ist, so müssen sie mit der Kraft V im Gleichgewicht seyn, indem sie in dem Körper gerade dieselbe Umdrehungsbeschleunigung, wie V, nur nach entgegengesetzter Richtung, hervorbringen würden. Wenn aber Kräfte der Art, wovon hier die Rede ist *), sich

*) Nämlich solche, deren Richtungen in einer auf der Achse senkrechten Ebene liegen.

an einem Körper, der um eine feste Achse beweglich ist, im Gleichgewicht halten, so bringen sie (Th. I. §. 63.) auf die Achse denselben Druck hervor, als ob jede nach einer mit der ihrigen parallelen Richtung an der Achse selbst, und zwar an dem Punkt derselben, wo die durch ihre Richtung auf die Achse senkrecht gelegte Ebene die Achse trifft, angebracht wäre. Hierdurch ist also der Druck, welchen die Achse von dem einen Theil der hinzugesetzten Elementarkräfte und der Kraft V erleidet, bestimmt. Es bleibt also noch der Druck, den sie von dem andern Theil der Elementarkräfte erleidet, übrig, welcher indessen = o ist. Man erhält also den Druck, den die Achse leidet, wenn man die Kraft V nach ihrer Richtung und jede der Elementarkräfte nach einer der wirklichen Umdrehung entgegengesetzten Richtung an der Achse selbst, und zwar an den so eben näher angegebenen Punkten derselben anbringt. Kann man für die Elementarkräfte eine Resultirende finden, so wird die Achse von dieser Resultirenden und von der Kraft V, jede an dem gehörigen Punkte der Achse angebracht, gedrückt. Sollte es indessen für die Elementarkräfte auch keine Resultirende geben, so kann man dieselben doch immer auf eine bestimmte Zahl von Kräften bringen. Werden diese nebst der Kraft V an den gehörigen Punkten der Achse angebracht, so ergibt sich der auf diese dadurch hervorgebrachte Druck. Außerdem erleidet die Achse noch von den Schwungkräften einen Druck, welcher aber, wenn die Achse eine freie ist, = o.

Anmerk. Durch Hinzufügung der Elementarkräfte werden die Schwungkräfte gar nicht geändert, welches, da die jedem Element zugehörige Elementarkraft nach zwei gerade entgegengesetzten Richtungen angebracht wird, folglich an jedem Element sich von selbst aufhebt, offenbar ist. — Ueberhaupt hängt die Schwungkraft irgend eines körperlichen Elements nicht von seiner Beschleunigung, und zwar weder von seiner absoluten noch Umdrehungsbeschleunigung, also auch nicht von den Kräften, die auf es wirken, sondern nur von der Geschwindigkeit, die es wirklich hat, und von dem Halbmesser des Kreises, den es beschreibt, ab.

§. 93.

Auf einen Körper, der sich um eine feste Achse ba (fig. 44.) drehn kann, wirkt eine absolute Kraft P, deren Richtung in

einer auf der Achse senkrechten Ebene liegt. Die Masse des Körpers sey = M, das Perpendikel von der Richtung der Kraft auf die Achse = d, das Moment der Trägheit des Körpers = T, die Umdrehungsbeschleunigung, welche die Kraft P dem Körper ertheilt, in Graden ausgedrückt, = β, so ist nach (§. 70. 6.)

$$1)\ \beta = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{g\,P\,.\,d}{T}.$$

Um nun die Resultirende aus allen zu dieser Umdrehungs-Beschleunigung gehörigen Elementarkräften zu finden, so sey o (fig. 44.) irgend ein Element des Körpers, oe das von demselben auf die Umdrehungs-Achse ba gefällte Perpendikel, oh die Tangente, nach deren Richtung sich der Punkt o um die Achse dreht, also < eoh = R. Alsdann ist, wenn oe = r, die Masse des Elements = Q, die zugehörige Elementarkraft = V; nach (§. 70.)

$$2)\ V = \frac{Q\,\pi\,r}{180 \cdot g} \cdot \beta;$$

oder wenn man statt β den Werth (1) setzt.

$$3)\ V = \frac{Q\,.\,P\,.\,r\,.\,d}{T} = \frac{P\,.\,d}{T} \cdot (Q\,.\,r),$$

wo $\frac{P\,.\,d}{T}$ für alle Elemente des Körpers denselben Werth behält. — ol (fig. 44.) sey das für den Punkt o gehörige y, el das z desselben, so werden, wenn oh die Größe der Elementarkraft bei o vorstellt, om, og die Kräfte vorstellen, die man erhält, wenn man oh in zwei Kräfte nach den Richtungen der Achsen Y, Z zerlegt. Da < eoh = eom + + moh = R, und auch < eom + oel = R, so ist < moh = oel; also, da auch m = l = R, Δ moh $\sim$ oel. Daher

$$4)\ oh : om = oe : el = r : z,$$

$$5)\ oh : mh = oe : ol = r : y.$$

Setzt man hierin für oh die Kraft $V = \frac{P\,.\,d}{T} \cdot (Q\,r)$, so erhält man

$$6)\ \text{die Kraft nach } om = \frac{P.d}{T}.(Qz),$$

$$7)\ \text{die Kraft nach } mh = \frac{P.d}{T}.(Qy).$$

Die erste dieser Kräfte (6), welche nach om wirkt, ist negativ in Beziehung auf die Achse Y, indem sie das y von o zu vermindern strebt; wogegen die nach mh wirkende positiv in Beziehung auf die Achse Z ist. Bezeichnet man also die Kräfte, worin die nach oh wirkende in Beziehung auf die Achsen Y, Z zerlegt wird, durch N, U, so ist

$$8)\ N = -\frac{P.d}{T}.(Qz),$$

$$9)\ U = \frac{P.d}{T}.(Qy).$$

Zerlegt man so für jedes Element des Körpers die zugehörige Elementarkraft in zwei andere, so werden dadurch alle Elementarkräfte auf zwei Systeme paralleler Kräfte gebracht. Die Resultirende aller Kräfte des ersten Systems (parallel mit Y) sey L, und δ (fig. 44.) der Ort, wo sie angebracht werden muß. Da dieselbe nach $\delta\varphi$ parallel mit Y wirkt, so kann man sie sich bei φ, wo ihre Richtung die Ebene Z, X trifft, angebracht denken. Setzt man nun noch das z (φq) des Punktes $\varphi = b$, das x (bq) desselben $= a$, so hat man, wie aus der Lehre von den parallelen Kräften bekannt ist,

$$10)\ L = -S.\left(\frac{P.d}{T}.Qz\right) = -\frac{P.d}{T}S.(Qz).$$

Setzt man das z des Schwerpunkts des Körpers $= h$, so hat man, da $S.Qz = Mh$,

$$11)\ L = -\frac{P.M.d.h}{T},$$

$$12)\ a = \frac{-S.\left(\frac{P.d}{T}Qx.z\right)}{-S.\left(\frac{P.d}{T}Qz\right)}, \text{ oder}$$

$$13)\ a = \frac{S.(Qxz)}{S.Qz} = \frac{S.(Qxz)}{M.h},$$

$$14)\ b = \frac{-\,S.\left(\frac{P.d}{T}\,Q\,z^2\right)}{-\,S.\left(\frac{P.d}{T}\,Q\,z\right)} = \frac{S.(Q\,z^2)}{M\,h}.$$

f sey der Ort für die Resultirende der Kräfte des zweiten Systems (9), so kann man sich dieselbe in dem Punkt (r), wo ihre Richtung die Ebene X, Y trifft, angebracht denken. Bezeichnet man diese Resultirende durch L′, das y (rs) des Punktes r durch b′, das x (bs) desselben durch a′, das y des Schwerpunktes durch f, so erhält man

$$15)\ L' = \frac{P.M.d.f}{T},$$

$$16)\ a' = \frac{S.Qxy}{S.qy} = \frac{S.qxy}{M.f},$$

$$17)\ b' = \frac{S.q\,y^2}{M.f}.$$

Bringt man an dem Punkt q der Achse ba die Kraft L, und an dem Punkte s die Kraft L′, und zwar jede nach einer der ihrigen gerade entgegengesetzten Richtung, ferner an demjenigen Punkt, wo die durch die Richtung der Kraft P auf die Achse senkrecht gelegte Ebene die Achse trifft, die Kraft P nach ihrer Richtung an, so hat man den Druck, den die Achse ba durch die beschleunigende Kraft P erleidet; wozu noch der von den Schwungkräften hervorgebrachte Druck hinzugesetzt werden muß. Wir wollen nun über das Gesagte noch einige Bemerkungen machen.

I. Die Rechnung ist im Vorigen unter der Voraussetzung geführt worden, daß es für jedes der beiden Systeme von parallelen Kräften, worauf sich die Elementarkräfte bringen lassen, eine Resultirende gibt. Dieses letztere ist aber für parallele Kräfte nothwendig der Fall, wenn die Summen derselben nicht = o. (Th. I. §. 40. α). Es wird also hier sicher eine solche Resultirende geben, wenn weder L = o, noch L′ = o, d. h. wenn weder $-\frac{P.M.d\ h}{T} = o$, noch $\frac{P.M.d.f}{T} = o$, oder (da hier von den Werthen P, M, d keiner = o, auch

T nicht unendlich werden kann), wenn weder $h = o$, noch $f = o$, d. h. wenn die Umdrehungsachse ba nicht durch den Schwerpunkt geht.

II. Liegt nun der Schwerpunkt nicht in der Linie ba (X), diese ist aber eine durch den Anfangspunkt b gezogene (mechanische) Hauptachse, so ist $S.Qxz = o$, $S.Qxy = o$. Hierdurch wird sowohl a als a' (13, 16) $= o$. Die beiden Kräfte L, L' müssen also beide an demselbeu Punkt der Achse, und zwar an dem Anfangspunkt derselben, angebracht gedacht werden. Da die Richtungen derselben unter einem rechten Winkel gegeneinander geneigt sind, so entsteht aus denselben eine mittlere Kraft $= \sqrt{(L^2 + L'^2)} = \frac{P.M.d}{T} \sqrt{(h^2 + f^2)}$. Setzt man diese $= H''$, die Winkel, welche ihre Richtung mit den Achsen Y, Z macht, der Ordnung nach γ, δ, so ist

$$H'' = \frac{P.M.d}{T} \sqrt{(h^2 + f^2)},$$

$$\cos.\gamma = \frac{L}{H''} = \frac{-h}{\sqrt{(h^2 + f^2)}},$$

$$\cos.\delta = \frac{L'}{H''} = \frac{f}{\sqrt{(h^2 + f^2}}.$$

In dem hier betrachteten Falle (wo $S.Qxz = o$, $S.qxy = o$) lassen sich die Schwungkräfte ebenfalls auf zwei (H, H') (§. 90. 23, 24) bringen, die auch an dem Anfangspunkt b der Achse angebracht werden müssen (§. 90. II.). Die Schwungkräfte lassen sich daher mit den Elementarkräften, da sie alle an demselben Punkt wirken, zu einer Einzigen (w) zusammensetzen. Die Achse wird also nur von zwei Kräften w und P gedrückt, wovon die erste (w) im Anfangspunkt, und die zweite (P) in dem Punkt der Achse angebracht werden muß, wo die durch ihre Richtung senkrecht auf die Achse gelegte Ebene die Achse schneidet.

III. Liegt aber der Schwerpunkt in ba, so ist in a, a' (13, 16) der Nenner $= o$. Da jeder dieser Nenner die Summe von parallelen Kräften darstellt, so kann er nur dann Null werden, wenn die Summe der positiven Kräfte der der

negativen gleich ist. In diesem Falle lassen sich die Kräfte bekanntlich (Th. I. §. 40.) auf zwei gleiche und entgegengesetzte bringen. Man muß also alsdann für den Ort der Resultirenden aus den positiven sowohl, als negativen Kräften eines jeden Systems die zugehörigen Coordinaten besonders suchen, und sich jede an der gehörigen Stelle von X angebracht denken. Ist das für die Resultirende aus den positiven Kräften gehörige x dem für die Resultirende aus den negativen gleich, so müssen beide Resultirende an denselben Punkt der Achse X angebracht werden. Sie heben sich also, da sie gleich und entgegengesetzt sind, einander auf. Damit aber die Resultirende aus den positiven Kräften mit der aus den negativen dasselbe x habe, dazu wird für die mit Y parallelen Kräfte erfordert, daß

18) $S.Qxz = 0$ *)

und für die mit Z parallelen, daß

19) $S.Qxy = 0$.

Geschieht nun aber den Gleichungen 18) 19) beiden ein Ge-

*) Nämlich die mit Y parallelen Kräfte, worin sich die zu den verschiedenen Elementen gehörigen Elementarkräfte zerlegen lassen, sind der Ordnung nach (siehe 7) $-\frac{P.d}{T}.Qz, -\frac{P.d}{T}Q'z'$ u.s.f., wo Q, Q' die Masse der verschiedenen Elemente, und z, z' u. s. f. die zugehörigen z bezeichnen. Ist nun die Summe derselben $= 0$, d. h. ist $S.(Qz) = 0$, so verfahre man, um zu entscheiden, ob die Resultirende aus den positiven Kräften dasselbe x, wie die aus den negativen Kräften hat, gerade so wie (Th. I. §. 40. γ und δ). Man denke sich von allen Kräften Eine, z. B. die erste weggenommen, und suche die Resultirende aus den Uebrigen, so wie auch das x des Punktes, wo sie angebracht ist. Da die Summe der übrigbleibenden Kräfte nicht Null seyn kann, so muß es für dieselben eine Resultirende geben, und man findet, wenn man das x derselben $= p$ setzt,

$$p = \frac{Q'z'x' + Q''z''x'' + \ldots}{Q'z' + Q''z'' + \ldots}.$$ Dieses

p muß dem x der abgesonderten Kraft gleich oder $= x$ seyn. Dieses wird, wie aus (Th. I. §. 40. δ. VII.) folgt, der Fall seyn, wenn $Qxz + Q'x'z' + Qx''z'' + \ldots =$ $= S.Qxz = 0$.

nügen, so ist die Achse b a, wenn sie, wie hier angenommen worden, durch den Schwerpunkt geht, eine freie Achse, wofür sich die Wirkung der Schwungkräfte ebenfalls aufhebt. Wenn also auf einen Körper, der sich um eine feste Achse, die zugleich eine freie ist, dreht, oder drehen kann, eine beschleunigende Kraft wirkt, so entsteht dadurch und durch die Schwungkräfte zusammengenommen auf einen Punkt der Achse, und zwar auf denjenigen, worin die durch die Richtung der Kraft auf die Achse senkrecht gelegte Ebene die Achse schneidet, nur ein Druck, welcher der Kraft P gleich ist. —

IV. Nun gehe aber b a durch den Schwerpunkt, so daß h, f (in 13, 16 = o), und S. Q x z, S. Q x y seyen entweder beide oder Eines derselben sey nicht = o. Nehmen wir zuerst an, S. Q x z sey nicht = o. Alsdann lassen sich die mit Y parallelen Kräfte, da ihre Summe = o, auf zwei gleiche und entgegengesetzte bringen. Allein da die Summe der Produkte aus diesen Kräften in die zugehörigen x, oder da

$$-\frac{P.d}{T}(Q z x + Q' z' x' + \ldots) = -\frac{P.d}{T} S.(Q x z)$$

nicht = o, oder da, was dasselbe ist, S. (Q x z) nicht = o, so ist (Th. I. §. 40.) das x der Resultirenden aus den positiven Kräften dem der Resultirenden aus den negativen nicht gleich. Man muß also alsdann das x jeder dieser Resultirenden besonders suchen, und jede an dem gehörigen Punkte der Achse b a anbringen. Dasselbe, was jetzt in Beziehung auf die mit Y parallelen Kräfte gesagt worden, gilt auch für die mit Z parallelen. Ist also S. Q x y = o, so heben sich die Wirkungen aller mit Z parallelen Kräfte auf die Achse b a auf. Ist aber S. (Q x y) nicht = o, so lassen sich die Kräfte auf zwei gleiche und entgegengesetzte bringen, wovon jede an einem besondern Punkt von X wirkt. — Für die Schwungkräfte gilt in diesem Fall etwas Aehnliches (§. 90. III.)

V. Wir haben im Vorigen auf die Werthe b, b′ (14, 17) d. h. auf das z der Resultirenden L (11) und auf das y der Resultirenden L′ (15) keine nähere Rücksicht genommen. Da nämlich, um die Wirkung der Kräfte auf die Achse b a (X) zu bestimmen, jede an derselben und zwar

da angebracht werden muß, wo die durch ihre Richtung auf X senkrecht gelegte Ebene die Achse X schneidet, so kommt es bei der Kraft L auf den Werth von b (ihres z) und bei L′ auf den Werth von b′ (ihres y) nicht an. Wenn auch z. B. der Werth von b (14) unendlich wird, welches nur geschehn kann, wenn S. Q z = o und S. Q x z nicht = o, so folgt daraus nur, daß sich alle mit Y parallelen Kräfte auf zwei gleiche und entgegengesetzte bringen lassen, welche nicht dasselbe z haben Der Punkt, wo jede dieser beiden Kräfte an der Achse b a angebracht werden muß, bestimmt sich aber nur durch das x derselben ganz unabhängig von b (14). Das so eben von b Gesagte gilt auch für b′ (17).

§. 94.

Alles bleibe so, wie im Anfang des vorig. (§.) angenommen worden. Man soll an zwei gegebenen Punkten q, s (fig. 44.) der Achse b a Kräfte anbringen, wodurch die durch die Kraft P auf die Achse hervorgebrachte Wirkung aufgehoben wird. —

a) Man setze das x der Punkte q, s der Ordnung nach m, m′ (d. h. b q = m, b s = m′,) das x des Punktes, woran die Kraft P wirkt, = n, die Winkel, die ihre Richtung mit den Achsen Y, Z macht, der Ordnung nach β, γ. Man denke sich die Kraft P an der Achse, und zwar an einem Punkte derselben, dessen x = n, angebracht, und daselbst in zwei Kräfte R, S nach den Richtungen der Achsen Y und Z zerlegt. Alsdann hat man

1) $R = P \cos. \beta$,

2) $S = P \cos. \gamma$.

b) Man muß nun, um den Druck, den die Achse, ohne Rücksicht auf die Schwungkräfte erleidet, zu bestimmen, noch die Kräfte L, L′ (§. 93. 10, 14) in den Entfernungen a, a′ (§. 93. 13, 16) von dem Anfangspunkt b an der Achse anbringen, oder sollte Eines der Systeme von Kräften, wofür L, L′ die Resultirende darstellen, keine Resultirende haben, so muß man sich nach dem (§. 93. III.) Erklärten statt L oder

L′ zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte an den gehörigen Punkten von x angebracht denken.

c) Bringt man nun an jedem der gegebenen Punkte q, s zwei Kräfte, an den ersten D, D′, an dem zweiten E, E′, und zwar D, E parallel mit Y; D′, E′ parallel mit Z an, und bestimmt die Größe derselben so, daß D, E alle mit Y parallelen, und D′, E′ alle mit Z parallelen Kräfte, die an der Achse X wirken, aufhebt, so braucht die Achse weiter nicht gehalten zu werden.

d) Sieht man, wie hier angenommen wird, nicht auf die Wirkung der Schwungkräfte, so sind die hier in Betrachtung kommenden Kräfte, die an der Achse x wirken, wie folgt, und zwar die mit

Y parallelen: L, P cos. β, D, E;

die mit Z parallelen: L′, P cos. γ, D′, E′.

Sollen die ersten sich aufheben, so hat man

3) $L + P. \cos. \beta + D + E = o.$

4) $L . a + n . P \cos. \beta + m . D + m' E = o.$

Aus 4) folgt

5) $E = - L - P \cos. \beta - D.$

Hierdurch erhält man aus 4)

6) $(a - m') L + (n - m') P \cos. \beta + (m - m') D = o.$

Also 7) $D = \dfrac{(m' - a) L + (m' - n) P \cos. \beta}{m - m'}.$

Ganz auf ähnliche Art findet man

8) $E = \dfrac{(m - a) L + (m - n) P \cos. \beta}{m' - m}.$

Sollen eben so die mit Z parallelen Kräfte sich aufheben, so hat man

9) $H' + P \cos. \gamma + D' + E' = o,$

10) $H' a' + n . P \cos. \gamma + m D' + m' E = o.$

Hieraus ergibt sich auf eine ähnliche Art, wie für D, E.

11) $\dfrac{D' = (m - a) L + (m' - n) P \cos. \gamma}{m - m'},$

12) $E' = \dfrac{(m - a') L' + (m - n) P \cos. \gamma}{m' - m}.$

Wenn die Kräfte L, L', eine Resultirende haben, so ist aus (§. 93. 11, 14, 15, 16)

$$13)\ a L = - \frac{P . d}{T} . S . Q x z,$$

$$14)\ a' L' = \frac{P . d}{T} . S . Q x y.$$

Haben die Kräfte L, L' keine Resultirende, oder hat Eine derselben keine, so läßt sich diejenige, wofür dieses der Fall ist, allezeit auf zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte, deren Richtungen nicht in dieselbe gerade Linie fallen, zurückführen (§. 93. III.). Man muß alsdann (nach §. 93. III.) eine der Kräfte L, L' oder beide = o setzen, und statt des Moments der Kräfte L, L' die Summe der Momente der eben genannten (gleichen und entgegengesetzten) Kräfte, d. h. statt L a den Ausdruck $- \frac{P . d}{T} S . Q x z$, und statt L' a' den Ausdruck $\frac{P . d}{T} S . Q x y$, oder gerade dieselben Ausdrücke, wie auch für den Fall, wo L, L' wirklich die Resultirende darstellen, in Rechnung bringen. Hieraus ergibt sich für alle Fälle aus 7) 8) 11) 12), wenn man noch statt L, L' ihre Werthe (§. 93.) setzt,

$$15)\ D = \frac{P(d S . Q x z - m' d h M + (m' - n) T \cos. \beta)}{(m - m') T}$$

$$16)\ E = \frac{P(d S . Q x z - m d h M + (m - n) T \cos. \beta)}{(m' - m) T}$$

$$17)\ D' = \frac{P(d S . Q x y - m' d f M + (m' - n) T \cos. \gamma)}{(m - m') T}$$

$$18)\ E' = \frac{P(d S . Q x y - m d f M + (m - n) T \cos. \gamma)^{*)}}{m' - m}$$

Da D mit D' und E mit E' an demselben Punkt (die beiden

---

*) Man sieht leicht, daß sich 15 in 16 und 17 in 18 verwandelt, wenn man nur m mit m' vertauscht. Eben so verwandelt sich 15 in 17, und 16 in 18, wenn man nur β mit γ und h mit f vertauscht.

ersten bei p, die letzten bei s) angebracht sind, so kann man D mit D′ und eben so E mit E′ zu Einer Kraft zusammensetzen, und zwar wird die Resultirende aus den beiden ersten $= \sqrt{(D^2 + D'^2)}$, und die aus den beiden letzten $= \sqrt{(E^2 + E'^2)}$ seyn. In allen Fällen also kann man durch zwei Kräfte, die man an zwei willkührlichen Punkten der Achse anbringt, den Druck auf dieselbe aufheben. — Es ist leicht, die Kräfte, wodurch die Achse bei p, s gehalten werden muß, so zu bestimmen, daß dadurch auch die Wirkung der Schwungkräfte auf die Achse aufgehoben wird. Man braucht zu dem Ende zu den Gliedern der Gleichung 3) nur noch H (§. 90. 23), und zu denen der Gleichung 4) noch Ha (§. 90, 23, 25) hinzuzufügen, so geben sie die für diesen Fall gehörigen Werthe von D und E. Durch ein ganz ähnliches Verfahren erhält man die von D′ und E′. Allein wir wollen, ohne uns dabei länger aufzuhalten, den Fall betrachten, wo ba eine freie Achse ist, wo sich also die Wirkung der Schwungkräfte auf die Achse von selbst aufhebt. Alsdann ist zugleich, da jede freie Achse nothwendig durch den Schwerpunkt geht, $hM = o$, $fM = o$. Bezeichnet man daher die Werthe, die D, E u. s. f. für diesen Fall annimmt, durch $D_{,,}$, $E_{,,}$, u. s. f., so erhält man

$$19)\ D_{,,} = \frac{P.\cos.\beta\,(m' - n)}{m - m'},$$

$$20)\ E_{,,} = \frac{P.\cos.\beta\,(m - n)}{m' - m},$$

$$21)\ D'_{,,} = \frac{P.\cos.\gamma\,(m' - n)}{m - m'},$$

$$22)\ E'_{,,} = \frac{P.\cos.\gamma\,(m - n)}{m' - m}.$$

§. 95.

Wenn ein Körper sich um eine freie Achse (sie sey befestigt oder nicht) dreht, und während dieser Umdrehung auf alle Elemente desselben Kräfte, die den Massen der Elemente proportional sind, nach parallelen und übereinstimmenden Richtungen wirken, so erhält die Umdrehungsachse dadurch eine

progressive Bewegung, die für jede Zeit derjenigen gleich ist, welche der Körper, wenn er ganz in Ruhe gewesen wäre, durch die Wirkung derselben Kräfte erhalten hätte, und derselbe setzt zugleich seine Umdrehungsbewegung um dieselbe Achse mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, gerade so, als ob die genannten Kräfte gar nicht auf ihn gewirkt hätten. Gesetzt nämlich, ein Element o des Körpers (fig. 45.) habe wegen der Umdrehung um die Achse b a eine solche Bewegung, daß es dadurch in einer unendlich kleinen Zeit von o nach h kommt, und es wirke nach irgend einer willkührlichen Richtung o m eine absolute Kraft auf dasselbe, wodurch es (für sich) in derselben unendlich kleinen Zeit von o nach m getrieben würde, so würde es, wenn es mit den übrigen Elementen nicht zusammenhinge, in der angenommenen Zeit die Linie o q durchlaufen, d. h. man würde seinen Ort finden, wenn man es zuerst den Raum o h durchlaufen ließe, oder an den Ort, wohin es durch die Umdrehung gelangen würde, brächte, und es dann nach der Richtung $hq \# om$ um eine Weite $hq = om$ verschöbe. Allein der Zusammenhang der Theile kann in dem Falle, wovon wir hier reden, hierin gar nichts ändern. Da nämlich auf alle Elemente der Masse gleiche Kräfte nach parallelen und gleichen Richtungen wirken, so würde man, wenn sie alle ohne Zusammenhang wären, den Ort, wo jedes nach der angenommenen unendlich kleinen Zeit ist, finden, wenn man es zuerst an denjenigen, wohin es durch die Umdrehung allein gelangte, brächte, und es von da nach einer mit o m parallelen Richtung um die Weite o m verschöbe. Durch eine solche Verschiebung behalten aber offenbar alle Theile des Körpers ihre Lage gegeneinander durchaus unverändert bei. Daher wirkte bei dieser Bewegung, wenn sie allen Elementen gleichzeitig ertheilt würde, kein Element auf das andere ein; folglich kann auch durch den Zusammenhang der Elemente in dieser Bewegung keine Aenderung hervorgebracht werden. Da nun in dem ersten unendlich kleinen Zeittheilchen jedes Element der auf es wirkenden Kraft eben so folgt, als ob es mit den übrigen nicht zusammenhinge, so erhalten dadurch alle Elemente des Körpers außer der Bewegung, die sie durch die

Umdrehung schon haben, noch eine andere von gleicher Geschwindigkeit und nach parallelen und übereinstimmenden Richtungen. Die relative Bewegung der Elemente gegeneinander, wovon ihre Umdrehung um die Achse ba abhängt, wird also dadurch nicht geändert. Die Achse ba bleibt also am Ende des zweiten Zeittheilchens auch noch eine freie Achse. Da sich nun das, was in Beziehung auf das erste Zeittheilchen gesagt worden, auf alle folgenden ausdehnen läßt, so ist die Richtigkeit unseres Satzes offenbar.

Zus. Aus dem so eben Erwiesenen folgt sehr leicht, daß, wenn ein Körper sich auch um eine nicht freie Achse dreht, und auf alle Massentheilchen desselben gleiche Kräfte nach parallelen und übereinstimmenden Richtungen wirken; die Umdrehungsbewegung mit allen ihren Umständen, die Veränderung der Achse u. s. f. gerade so fortgeht, als ob diese Kräfte nicht da wären; daß aber der Körper zugleich dieselbe progressive Bewegung erhält, die er erhalten würde, wenn er sich gar nicht drehte.

§. 96.

Mit Hülfe des in diesem Abschnitt Erklärten können wir nun die schwierige Aufgabe, (deren vollständige Auflösung selbst vermittelst der Integralrechnung bis jetzt nur in einer sehr beschränkten Menge von Fällen gelungen ist) nämlich die Bewegung zu bestimmen, die ein völlig freier Körper durch Kräfte erhält, die an willkührlichen Punkten, und nach willkührlichen Richtungen auf ihn wirken, wenigstens in einigen sehr einfachen Fällen auflösen. Zu dem Ende bedenke man Folgendes. —

I. Wenn auf alle Elemente eines Körpers Kräfte, welche den Massen proportional sind, wirken, so ist die Resultirende derselben ihrer Summe im Schwerpunkt angebracht gleich (Th. I. §. 41). Wenn daher der Schwerpunkt eines Körpers von irgend einer absoluten Kraft getrieben wird, so erhält der Körper dadurch dieselbe Bewegung, als ob die Kraft über alle Theile seiner Masse gleichförmig vertheilt wäre. In diesem letztern Falle erhält aber der Körper ganz gewiß eine fortschreitende d. h. eine solche Bewegung, wobei sich alle Punkte

desselben mit gleichen Geschwindigkeiten und nach parallelen und übereinstimmenden Richtungen bewegen. Ist das Gewicht des Körpers = M, die im Schwerpunkt angebrachte (absolute) Kraft = P, so ist die Beschleunigung = $\frac{g \cdot P}{M}$, woraus man, wenn die Kraft sich gleich bleibt, den in jeder Zeit t durchlaufenen Weg nach (§. 32, 36); und in jedem Falle, die Richtung und Größe der Kraft mag sich ändern, wie man will, die Beschleunigung und den durchlaufenen Weg nach denselben Regeln findet, nach welchen man die Bewegung eines Punktes, worin die ganze Masse und die ganze Kraft vereinigt wäre, finden würde.

II. Wirkt nun auf einen Punkt eines völlig freien Körpers irgend eine absolute Kraft P, so denke man sich durch die Richtung derselben und durch den Schwerpunkt eine Ebene gelegt. Steht nun eine der freien Achsen des Körpers auf dieser Ebene senkrecht, so wird man die Bewegung desselben auf folgende Art finden können.

III. Denkt man sich, diese freie Achse sey fest, so wird der Körper eine umdrehende Bewegung um dieselbe annehmen, deren Umstände sich nach dem (§. 68—70) Gelehrten finden lassen. Die Achse wird dabei einen gewissen Druck erleiden, der, weil die Achse eine freie ist, nur noch von der Kraft P abhängt, und in diesem Fall einzig darin besteht, daß der Schwerpunkt mit einer Kraft = P, und zwar nach einer Richtung, die mit der von P parallel und übereinstimmend ist, gedrückt wird. Bringt man also im Schwerpunkt die Kraft — P. d. h. eine der ebengenannten gerade entgegengesetzte an, so erleidet die Achse weiter keinen Druck. Es ist also eben so, als ob sie fest wäre; so daß die Umdrehung des Körpers um dieselbe sich nach den für diesen Fall gelehrten Regeln bestimmen läßt.

IV. Denkt man sich nun im Schwerpunkt noch eine Kraft + P angebracht, so wird, da dieselbe (I) eben so wirkt, als ob sie über alle Theile der Masse gleichförmig vertheilt wäre, nach (§. 95) die umdrehende Bewegung gerade so wie vor Hinzufügung dieser Kraft fortgehn, der Körper aber noch überdem

eine fortschreitende Bewegung annehmen, die gerade so ist, als ob der Körper gar keine umdrehende Bewegung hätte. Allein auf diese Weise sind im Schwerpunkt zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte — P, + P angebracht. Da diese sich also aufheben, so wirkt auf den Körper nun keine andere Kraft als P an dem Anfangs angenommenen Punkt. Diese bringt also ebenfalls die zuletzt angeführte Wirkung hervor.

Wenn also auf einen völlig freien Körper eine absolute Kraft wirkt, deren Richtung in einer durch den Schwerpunkt gelegten und auf Einer der freien Achsen des Körpers senkrechten Ebene liegt, so erhält der Körper dadurch eine fortschreitende und umdrehende Bewegung zugleich, und zwar ist die fortschreitende so, als ob die Kraft im Schwerpunkt angebracht, oder über alle Theile der Masse gleichförmig vertheilt, und die umdrehende so, als ob die freie Achse, worauf die durch die Richtung der Kraft und den Schwerpunkt gelegte Ebene senkrecht steht, völlig fest wäre.

§. 97.

Obschon sich ohne Hülfe der Integralrechnung die allgemeine Auflösung der (vorig. §.) angeführten Aufgabe nicht näher geben läßt, so wollen wir doch den mechanischen Grundsatz, woraus die Auflösung in jedem Fall hergeleitet werden muß, den man auch nach seinem Erfinder den Grundsatz des d'Alembert nennt, umständlich erklären. Wir können auch hier schon eine für den Gegenstand, wovon in diesem Abschnitt die Rede ist, sehr wichtige Folge daraus herleiten. —

Wenn noch so viele absolute Kräfte von willkührlicher Richtung und Größe auf einen Körper wirken, derselbe mag völlig frei seyn, oder sich um einen festen Punkt oder um eine feste Achse drehen können, so wird es, wie auch immer die Bewegung, die der Körper erhält, oder die Aenderung, welche seine Bewegung erleidet, beschaffen seyn mag, doch für jedes Element eine Kraft geben, die unmittelbar an diesem ange-

bracht, seine Bewegung auf dieselbe Art ändern würde, wie es durch die wirklich angebrachten Kräfte geschieht. Diese Kräfte, die wir schon (§. 92) die Elementarkräfte genannt haben, können freilich theils für die verschiedenen Elemente, theils auch für die verschiedenen Zeitpunkte, wo man die Bewegung betrachtet, verschieden seyn, indem die wirklich angebrachten Kräfte theils in Hinsicht ihrer Stärke, theils in Hinsicht der Art, wie sie angebracht sind, veränderlich seyn können. Allein für ein unendlich kleines Zeittheilchen ist für dasselbe Element die Elementarkraft unveränderlich. Da die Elementarkräfte in derselben Zeit dieselbe Wirkung auf den Körper hervorbringen, wie die Kräfte, die wirklich an demselben angebracht sind; so müssen sie, wenn jede an jedem Element nach einer Richtung angebracht wird, die derjenigen, nach welcher es von den am Körper wirklich angebrachten Kräften bewegt wird, gerade entgegengesetzt ist, die Wirkung dieser Kräfte aufheben, oder mit denselben im Gleichgewicht seyn. Man kann dieses Gesetz noch auf eine für die Anwendung bequemere Art ausdrücken.

Nach (§. 30, 31) verhalten sich zwei absolute Kräfte gegeneinander wie die Produkte aus den Massen in die Geschwindigkeiten, die beide Kräfte denselben in der nämlichen, wenn schon unendlich kleinen, Zeit ertheilt haben. Wenn man daher weiß, um wie viel sich in einer unendlich kleinen Zeit die Geschwindigkeit eines körperlichen Elements geändert hat, so kann man durch das Produkt aus der Masse desselben in diese Aenderung der Geschwindigkeit die Größe der zu dem Element gehörigen Elementarkraft ausdrücken. Ganz auf dieselbe Art muß man alsdann auch die Größe der an dem Körper wirklich angebrachten Kräfte ausdrücken, nämlich durch das Product irgend einer willkührlichen Masse in die Geschwindigkeit, die sie durch die Kraft in derselben unendlich kleinen Zeit erhält, welche für die Elementarkräfte angenommen worden. — Dieselbe Regel gilt auch, wenn die Kräfte, welche auf den Körper wirken, bewegte Massen sind, welche demselben ihre Bewegung entweder ganz oder zum Theil mittheilen. Man muß in dem letztern Falle nur die Größe der Bewegung (§. 31) kennen, welche die bewegte Masse dem Körper mitgetheilt hat,

so wie auch, an welchem Punkte des Körpers diese Mittheilung statt gehabt hat. Ins besondere gilt diese Regel, wenn der Körper in Bewegung ist, und ferner gar keine Kräfte auf ihn wirken. Wir haben schon im Vorigen gehört, daß alsdann durch den Zusammenhang der Theile, und deren Einwirkung auf einander sich die einmal angefangene Bewegung ändern kann. So haben wir z. B. oben gehört, daß, wenn man einem Körper eine Umdrehungsbewegung um eine Achse ertheilt, diese, wenn sie keine freie Achse und nicht befestigt ist, durch die Wirkung der Schwungkräfte aus ihrer Lage gebracht wird. Diese Schwungkräfte sind aber keine besondere auf die Elemente des Körpers einwirkenden Kräfte, welche die Bewegung desselben beschleunigen, sondern sie entstehen einzig durch das Bestreben einer jeden bewegten Masse ihre Bewegung beizubehalten. Da nun hierdurch keine neue Kraft hinzukommt, also die Veränderung in der Richtung und Geschwindigkeit einzig von der Einwirkung der Elemente aufeinander hervorgebracht wird, so müssen die Quantitäten der Bewegung, die für die verschiedenen Elemente in einem gewissen Augenblick statt haben, den Quantitäten derselben nach Verlauf eines unendlich kleinen Zeittheilchens, wenn man diese Quantitäten in beiden Fällen als Kräfte betrachtet, und die Richtung der einen derjenigen der andern entgegengesetzt annimmt, sich unter den Umständen, in welchen sich der bewegte Körper befindet, im Gleichgewicht halten. — Die Richtigkeit dieses Gesetzes leuchtet bei einigem Nachdenken von selbst ein, und wird in allen Fällen durch die Uebereinstimmung der Resultate, welche man durch Hülfe desselbe erhält, mit denjenigen, die sich durch andere Methoden ergeben, durchaus bestätigt. — Wir haben dasselbe, ohne es gerade zu nennen, schon oben (§. 70 und folg.) zur Bestimmung der Bewegung der zusammengesetzten Pendel, und überhaupt bei der Umdrehungsbewegung der Körper um eine feste Achse angewendet.

§. 98.

Wir wollen nun das d'Alembertsche Gesetz noch anwenden, um in dem Fall, wo noch so viele Kräfte, von welcher

Art man immer will, auf einen völlig freien Körper wirken, die Bewegung des Schwerpunkts zu finden. — Zu dem Ende denke man sich durch einen willkührlichen Punkt des Raumes drei rechtwinkelige Coordinatenachsen X, Y, Z gelegt, welche bei der Bewegung des Körpers durchaus dieselbe Lage im Raume beibehalten, und worauf zu jeder Zeit die Punkte des Körpers bezogen werden. Da der Körper in Bewegung ist, so wird sich der Werth der Coordinaten x, y, z nicht allein nach Verschiedenheit der Punkte des Körpers, die man betrachtet, sondern auch, selbst für den nämlichen Punkt, nach Verschiedenheit der Zeit ändern. Wir wollen um die erste Verschiedenheit zu bezeichnen, den Buchstaben x, y, z, wie bis hierhin immer, oben und zur Bezeichnung der zweiten Verschiedenheit unten Einen oder mehrere Accentstriche beifügen. Wenn daher bei zwei oder drei dieser Buchstaben (x, y, z,) die Zahl der Accentstriche oberhalb übereinstimmt, so beziehen sie sich auf denselben Punkt, und stimmt sie unterhalb überein, auf dieselbe Zeit. So bedeuten z. B. x, y, z die Coordinaten des ersten Punktes oder Elements des Körpers im Anfang des ersten Zeittheilchens; $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die Coordinaten desselben Elements im Anfang des zweiten Zeittheilchens. Eben so bedeuten $x'''_{,,}$, $y'''_{,,}$, $z'''_{,,}$ die Coordinaten des vierten Elements im Anfang des dritten Zeittheilchens. Die Coordinaten des Schwerpunkts werden im Anfang des ersten Zeittheilchens durch a, b, c und in den folgenden Zeittheilchen, nach derselben Regel, wie die der übrigen Punkte durch $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ u. s. f. bezeichnet. Ist nun das Gewicht des Körpers $= M$, das Gewicht eines (des ersten) Elements $= \mu$, so hat man, wie aus der Lehre vom Schwerpunkt bekannt ist,

$$1)\ S.\mu.x = M.a;\quad 2)\ S.\mu.y = M.b;\quad 3)\ S.\mu.z = M.c.$$

Eben so hat man auch nun im zweiten und dritten Zeittheilchen

$$4)\ S.\mu.x_{,} = M.a_{,};\quad 5)\ S.\mu.y_{,} = M.b_{,};$$

$$6)\ S.\mu.z_{,} = M.c_{,};\quad 7)\ S.\mu.x_{,,} = M.a_{,,},$$

$$S.\mu.y_{,,} = M.b_{,,},\quad S.\mu.z_{,,} = M.c_{,,}.$$

Hier ist $(x_{,} - x)$ der Weg, den das Element μ in dem ersten Zeittheilchen, in Beziehung auf die Achse X, zurückgelegt

hat; und eben so geben $(y_{,} - y)$, $(z_{,} - z)$ für dasselbe Element und Zeittheilchen die in Beziehung auf die Achsen Y, Z durchlaufenen Wege an, d. h. die genannten Ausdrücke $x_{,} - x$ u. s. f. stellen die Wege dar, die man erhält, wenn man den von dem Element μ wirklich durchlaufenen Weg nach den drei Achsen x, y, z zerlegt. Eben so stellen $(a_{,} - a)$, $(b_{,} - b)$, $(c_{,} - c)$ den vom Schwerpunkt in demselben Zeittheilchen in Beziehung auf jede der drei Achsen durchlaufenen Weg dar. Nun ist

$\mu\,(x_{,} - x) = \mu . x_{,} - \mu . x$, also aus 4) und 7)

8) $S . \mu\,(x_{,} - x) = S . \mu . x_{,} - S . \mu . x = M . a_{,} - M . a = M\,(a_{,} - a)$

9) $S . \mu\,(y_{,} - y) = M\,(b_{,} - b)$

10) $S . \mu\,(z_{,} - z) = M\,(c_{,} - c)$.

Man setze $x_{,} - x = s$, $x'_{,} - x' = s'$ u. s. f.; $y_{,} - y = q$, $y'_{,} - y' = q'$ u. s. f.; $z_{,} - z = r$, $z'_{,} - z' = r'$ u. s. f.; Eben so der oben erklärten Bezeichnungsart gemäß $x_{,,} - x_{,} = s_{,}$, $x'_{,,} - x'_{,} = s'_{,}$, $x_{,,,} - x_{,,} = s_{,,}$, $y_{,,} - y_{,} = q_{,}$, $y'_{,,} - y'_{,} = q'_{,}$; $y'_{,,,} - y'_{,,} = q'_{,,}$ u. s. f., $z_{,,} - z_{,} = p_{,}$, $z''_{,,,} - z''_{,,} = p''_{,,}$ u. s. f., ferner $a_{,} - a = l$, $b_{,} - b = m$, $c_{,} - c = n$, $a_{,,} - a_{,} = l_{,}$, $a_{,,,} - a_{,,} = l_{,,}$. Alsdann hat man aus 8), 9), 10)

11) $S . (\mu . s) = M . l$; $(S . \mu . q) = M . m$, $S . (\mu . p) = M . n$.

Eben so

12) $S . (\mu . s_{,}) = M . l_{,}$; $S . (\mu . q_{,}) = M . m_{,}$; $S . (\mu . p_{,}) = M . n_{,}$.

Da $s = x_{,} - x$ der Raum ist, den ein Element (μ) des Körpers in einem unendlich kleinen Zeittheilchen in Beziehung auf X durchlaufen hat, und die Geschwindigkeit für ein solches Zeittheilchen als unveränderlich betrachtet werden kann, so hat man, wenn man die Größe dieses Zeittheilchens in Sekunden ausgedrückt $= t$, und die Geschwindigkeit des Elements in Beziehung auf die Achse X im ersten Zeittheilchen $= d$, im zweiten $= d_{,}$ u. s. f. setzt,

13) $d = \frac{s}{t}$, $d_{,} = \frac{s'}{t}$, $d_{,,} = \frac{s''}{t}$ u. s. f.

Eben so erhält man, wenn man die Geschwindigkeiten

des Elements μ in Beziehung auf die Achsen y, z im ersten Zeittheilchen durch e, f im zweiten durch $e_,$ $f_,$ u. s. f. bezeichnet,

$$14) \; e = \frac{q}{t}; \; e_, = \frac{q_,}{t}, \; e_{,,} = \frac{q_{,,}}{t} \text{ u. s. f.}$$

$$15) \; f = \frac{p}{t}; \; f_, = \frac{p_,}{t}; \; f_{,,} = \frac{p_{,,}}{t}, \text{ u. s. f.}$$

Auf dieselbe Art erhält man, wenn man die Geschwindigkeiten des Schwerpunkts nach den drei Achsen im ersten Zeittheilchen durch α, β, γ, im zweiten durch $\alpha_,$; $\beta_,$; $\gamma_,$; u. s. f. bezeichnet,

$$16) \; \alpha = \frac{a_, - a}{t} = \frac{l}{t}; \; \beta = \frac{m}{t}, \; \gamma = \frac{n}{t}.$$

$$17) \; \alpha_, = \frac{l_,}{t}; \; \beta_, = \frac{m_,}{t}; \; \gamma = \frac{n_,}{t} \text{ u. s. f.}$$

Die Größe $d_, - d$ ist der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten des Elements μ im ersten und zweiten Zeittheilchen, oder $d_, - d$ stellt die Zunahme vor, welche die Geschwindigkeit des Elements μ (in Beziehung auf die Achse X) vom Anfang des ersten bis zum Anfang des zweiten Zeittheilchens erhält. Daher ist $(d_, - d) \cdot \mu$ derjenige Werth, um welchen die Größe der Bewegung (quantitas motus) (§. 31) des ersten Elements in dem ersten Zeittheilchen zunimmt. Eben so stellen $(e_, - e) \, \mu$; $(f_, - f)_, \, \mu$ die Zunahme der Größe der Bewegung für dasselbe Element und dasselbe Zeittheilchen in Beziehung auf Y, Z dar. Bezeichnet man die Summe aller solcher Zunahmen für alle Elemente in demselben ersten Zeittheilchen, wie gewöhnlich, durch $S \, . \, (d_, - d) \, \mu$, u. s. f., so hat man, wenn man die Werthe von d, $d_,$, e, e. u. s. f. aus 13,) 14,) 15,) nimmt,

$$18) \; S.(d_, - d)\mu = S \, . \left(\frac{s_, - s}{t}\right)\mu = S \, . \left(\frac{s_, \mu}{t}\right) - S.\left(\frac{s \, . \mu}{t}\right),$$

oder aus 11) 12) 16) 17)

$$19) \; S \, . (d_, - d) \, \mu = M \, . \left(\frac{l_, - l}{t}\right). = M \, (\alpha_, - \alpha).$$

Eben so erhält man

20) $S.(e,-e)\mu = M.(\beta,-\beta)$

21) $S.(f,-f)\mu = M.(\gamma,-\gamma)$.

Die Ausdrücke (19—21) stellen nach (§. 97) auch die Summe der Elementarkräfte dar. Man drücke nun die Größe jeder Kraft, die wirklich an dem Körper angebracht ist, ebenfalls durch die Größe der Bewegung aus, die sie einer willkührlichen Masse in der Zeit t ertheilen würde. Da es auf die Größe der Masse nicht ankommt,*) so beziehe man für alle auf den Körper wirkenden Kräfte die zugehörige Größe der Bewegung auf M. Wenn nun entweder an allen oder an einzelnen Massentheilchen μ, μ', μ'' absolute Kräfte nach willkührlichen Richtungen wirken, welche in Gewicht ausgedrückt der Ordnung, nach P, P′, P″ u. s. f. sind, so denke man sich jede derselben nach den Richtungen der drei Achsen zerlegt. Die nach X zerlegten seyen der Ordnung nach R, R′, R″, die nach Y zerlegten U, U′, U″ ..., die nach Z zerlegten W, W′, W″ ... die Geschwindigkeiten, welche diese Kräfte dem Element oder Massentheilchen, an welchem sie unmittelbar angebracht sind, in dem unendlich kleinen Zeittheilchen t nach der Richtung der drei Achsen ertheilen **) würden, wenn nämlich jedes Element für sich wäre und mit den andern nicht zusammenhinge, sind der Ordnung nach in Beziehung

22) auf die Achse X $= \frac{g.R.t}{\mu}, \frac{g.R'.t}{\mu'}, \frac{g.R''.t}{\mu''}$ u. s. f.

---

*) Ist nämlich irgend eine absolute Kraft im Gewicht ausgedrückt $= P$, so ertheilt sie in der Zeit t der Masse M die Geschwindigkeit $\frac{g.P.t}{M}$, und der Masse μ die Geschwindigkeit $\frac{g.P.t}{\mu}$ mit. Multiplicirt man beide Geschwindigkeiten jede mit der zugehörigen Masse, so erhält man für beide die Größe der Bewegung $= g.P.t$ unabhängig von M und μ.

**) Man muß sich erinnern, daß man unter der Geschwindigkeit, die eine Kraft einer Masse in der Zeit t ertheilt, diejenige versteht, welche die Masse am Ende der Zeit wirklich erhält, wenn sie im Anfang der Zeit t in Ruhe war, oder die Zunahme, welche ihre Geschwindigkeit in der Zeit t erhält, wenn sie in Bewegung ist.

23) auf die Achse Y $= \frac{g.U.t}{\mu}; \frac{g.U'.t}{\mu'}; \frac{g.U''.t}{\mu''}$ u. s. f.

24) auf die Achse Z $= \frac{g.W.t}{\mu}; \frac{g.W'.t}{\mu'}; \frac{g.W''.t}{\mu''}$ u. s. f.

Multiplicirt man jede dieser in der Zeit t erhaltenen Geschwindigkeiten mit der zugehörigen Masse, so erhält man die Zunahme, welche die Größe der Bewegung eines jeden Elements in der Zeit t durch die Wirkung der an ihm angebrachten Kraft P, P' u. s. f. erhalten würde, und zwar ist dieselbe der Ordnung nach in Beziehung

25) auf die Achse X $= g.R.t,\ g.R'.t,\ g.R''.t$ u. s. f.

26) auf die Achse Y $= g.U.t,\ g.U'.t,\ g.U''.t$ u. s. f.

27) auf die Achse Z $= g.W.t,\ g.W'.t,\ g.W''.t$ u. s. f.

Drückt man die Summe aller in (25 — 27) enthaltenen Glieder der Reihe nach durch S.g.R.t, S.g.U.t u. s. f. aus, so erhält man

28) $S.g.R.t = g.t.(R + R' + R''...)$

oder 29) $S.g.R.t = g.t.S.R.$

Eben so 30) $S.g.U.t = g.t.S.U,$

31) $S.g.W.t = g.t.S.W.$

Da die Glieder der Reihen (25 — 27) die Kräfte darstellen, welche wirklich entweder auf alle oder auf einzelne Elemente des Körpers wirken, so müssen sie, wenn man sich jede derselben an dem zugehörigen Massentheilchen nach einer der ihrigen gerade entgegengesetzten Richtung angebracht denkt, nach dem Grundsatz des d'Alembert sich mit den Elementarkräften 19) 20) 21) im Gleichgewicht halten. Dazu wird aber, da der Körper als ganz frei vorausgesetzt worden, (Th. I. Abschn. III. §. 49. α) erfordert, daß in Beziehung auf jede Achse die Summe der Elementarkräfte, und der wirklich an dem Körper angebrachten Kräfte, wenn letztere nach einer der ihrigen entgegengesetzten Richtung wirken, = o sey. Setzt man für die Summe der Elementarkräfte die (19 — 21) angegebenen Werthe, so erhält man

32) $M.(\alpha, -\alpha) - g.t.S.R = 0.$

33) $M.(\beta, -\beta) - g.t.S.U = 0.$

34) $M.(\gamma, - \gamma) - g.t.S.W = o.$

Hieraus erhält man

35) $\alpha, - \alpha = \frac{g.t.S.R}{M}$

36) $\beta' - \beta = \frac{g.t.S.U}{M}$

37) $\gamma, - \gamma = \frac{g.t.S.W}{M}$.

Hier ist $\alpha, - \alpha$, unserer oben festgesetzten Beziehung gemäß, die Zunahme, welche die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Zeit t wirklich erhält. Wenn aber alle Kräfte P, P' u.s.f. im Schwerpunkt angebracht, und nach den drei Achsen zerlegt würden, so wären die nach X zerlegten ebenfalls R, R', R''..., die nach Y zerlegten U, U', U''..., die nach Z zerlegten W, W'.... Die Kräfte der ersten Art würden also der ganzen Masse M des Körpers in der Zeit t eine Geschwindigkeit $= g.t.(R + R' + ...) = \frac{g.t.S.R}{M}$ mittheilen, welche der 35) angegebenen, die der Schwerpunkt wirklich erhält, gleich ist. Dasselbe läßt sich auf die nämliche Art in Beziehung auf Y und Z beweisen. Da nun die Geschwindigkeiten des Schwerpunkts in Beziehung auf alle drei Achsen in beiden Fällen übereinstimmen, so gilt dieses auch von der Richtung der Bewegung. —

Wenn also auf einen völlig freien Körper nach willkührlichen Richtungen, noch so viele absolute Kräfte, sie mögen eine Resultirende haben oder nicht, wirken, so erhält der Schwerpunkt des Körpers dadurch dieselbe Bewegung, als ob alle diese Kräfte, jede nach einer mit der ihrigen parallelen und übereinstimmenden Richtung im Schwerpunkt selbst angebracht wären.

Zus. Der so eben angeführte Satz gilt auch für relative Kräfte, wenn man nämlich nur Dasjenige als wirkende Kraft in Rechnung bringt, um welches die Größe der Bewegung

des Körpers durch die auf ihn einwirkende relative Kraft vermehrt worden. Dieses ist freilich in einzelnen Fällen oft schwer zu bestimmen. Doch sehe man hierüber den folgenden Abschnitt.

Anmerk. Die Anfänger könnten vielleicht eine Schwierigkeit dabei finden, daß bei der so eben (§. 98) ausgeführten Rechnung unter den Kräften P, P′ u. s f. die Schwungkräfte nicht besonders aufgeführt sind. Allein (wie schon oben erinnert worden), die Schwungkräfte sind keine besondern Kräfte, welche die Bewegung des Elements, worauf sie wirken, beschleunigen, sondern sie entstehn nur aus dem Bestreben, welches jedes Element vermöge seiner Bewegung hat, nach der einmal erhaltenen Richtung fortzugehn. Wenn also durch die Wirkung dieser Schwungkräfte ein Element beschleunigt wird, so geschieht dieses nur, weil wegen des Zusammenhangs der Elemente des Körpers sich die Bewegung der verschiedenen Elemente untereinander nach einem gewissen Gesetze vertheilt. Diese Vertheilung mag aber in einem Zeittheilchen geschehn, und die Bewegung sich dadurch ändern, wie man will, so wird immer, wenn man sich jedem Element die Größe der Bewegung, die es am Anfang des Zeittheilchens, und zugleich diejenige, die es am Ende desselben hat, jedoch letztere nach entgegengesetzter Richtung mitgetheilt denkt, Alles im Gleichgewicht seyn. Ist nun die Summe aller dieser Größen im Anfange des Zeittheilchens $= \gamma$, am Ende $= \gamma + \gamma'$, so muß, wenn der Körper völlig frei ist, nach (Th I. Abschn. III. §. 49. α) damit das Gleichgewicht Statt finde,

1) $\gamma - (\gamma + \gamma') = 0$ seyn.

Daher ist 2) $\gamma' = 0$;

d. h. die Zunahme der Größe der Bewegung also auch der Summe der Elementarkräfte, die bei einem völlig freien Körper durch die Schwungkräfte hervorgebracht wird, ist $= 0$. Die Schwungkräfte kommen daher in diesem Falle nicht in Betrachtung.

§. 99.

Durch den wichtigen Satz des (vorig. §.) läßt sich, nun die Aufgabe zu finden, welche (fortschreitende und umdrehende) Bewegung ein völlig freier Körper durch die Wirkung von noch so vielen Kräften erhält, wenigstens auf eine andere einfachere zurückbringen. Denkt man sich nämlich für jede auf den Körper wirkende Kraft im Schwerpunkt eine gleiche und entgegengesetzte angebracht, so erleidet der Schwerpunkt weiter keinen Druck, und bleibt in Ruhe. Dieser letztere kann also als fest angenommen werden, und der Körper wird durch die

auf ihn wirkenden Kräfte keine andere Bewegung als eine umdrehende um diesen Punkt annehmen können. Man bestimme diese Bewegung, und denke sich zugleich zu jeder im Schwerpunkt hinzugefügten Kraft wieder eine gleiche und entgegengesetzte hinzugefügt. Durch diese letztern Kräfte werden diejenigen, welche zuerst im Schwerpunkt angebracht worden, gänzlich aufgehoben, so daß die Bewegung des Körpers einzig von den wirklich an demselben angebrachten Kräften abhängt Da aber der Schwerpunkt durch die zuerst an ihm angebrachten Kräfte in Ruhe erhalten wird, und Kräfte, die im Schwerpunkt angebracht werden, einem Körper nur eine progressive Bewegung, und zwar dieselbe ertheilen, als ob sie über alle Theile seiner Masse gleichförmig vertheilt wären; so erhält der Körper durch Hinzufügung der letzten Kräfte noch eine diesen Kräften analoge progressive Bewegung, wobei seine umdrehende um den Schwerpunkt gerade so fortgeht, als ob dieser Punkt gänzlich in Ruhe wäre (§. 95. Zus.). Die Anfangs bemerkte Aufgabe ist also auf folgende zurückgebracht: die umdrehende Bewegung zu bestimmen, die ein Körper, dessen Schwerpunkt befestigt ist, doch so, daß der Körper sich um denselben frei drehn kann, durch die Wirkung gegebener Kräfte erhält. Obschon die allgemeinen Regeln hierüber nicht wohl anders als mit Hülfe der Differential- und Integralrechnung gefunden und erklärt werden können, so sind doch die Gründe, worauf sie beruhen, alle im Vorigen enthalten. — Wegen der nähern Ausführung verweisen wir nochmals auf die oben (§. 88) angeführten Schriften.

Achter Abschnitt.

Vom Stoße der festen Körper.

§. 100.

Wenn ein bewegter Körper auf einen andern bewegten oder ruhenden so trifft, daß er seine Bewegung nicht fortsetzen kann, ohne den andern ebenfalls in Bewegung zu setzen oder dessen Bewegung zu ändern, so sagt man, der erste stoße den zweiten. Gilt vom zweiten Körper das Nämliche in Beziehung auf den ersten, so sagt man, beide Körper stoßen einander oder sie stoßen gegen einander. — Der Stoß eines Körpers gegen einen andern kann sich unter mannigfaltigen Umständen ereignen. Geht die Richtung, nach welcher sich der Schwerpunkt des einen Körpers bewegt, auch durch den Schwerpunkt des andern, so heißt der Stoß ein centraler, sonst ein excentrischer Stoß. Steht die Ebene, worin sich beide Körper im Augenblicke des Stoßes berühren, senkrecht auf der Richtung, nach welcher sich sowohl der eine als andere Körper bewegt, so heißt der Stoß ein gerader, sonst ein schiefer Stoß. Der Stoß kann folglich central, und dabei gerade oder schief, und eben so gerade oder schief und in beiden Fällen sowohl central als excentrisch seyn. So stoßen zwei (homogene) Kugeln, deren Mittelpunkte sich nach derselben Linie bewegen, nothwendig central, und gerade gegen einander. Dasselbe gilt von zwei senkrechten Prismen, wenn sie mit den Grundflächen aneinander stoßen, und ihre Schwerpunkte sich in derselben geraden Linie bewegen. Stoßen dieselben Prismen (wie a b d c, f g n (fig. 46)) zwar auch mit ihren Grundflächen zusammen, aber die Linien e o, m b, nach welchen die Schwerpunkte e, m fortgehn, machen nicht dieselbe gerade Linie aus, so ist der Stoß gerade, aber excentrisch. Stoßen endlich zwei schiefwinkelige Prismen so wie (fig. 47) zeigt, aneinander, wo die Schwerpunkte e, m nach Richtungen e o, m a, die nicht in derselben geraden Linie liegen, fortgehn, so ist der Stoß zugleich schief und ex-

centrisch. — Die aneinander stoßenden Körper können bald nur eine progressive, oder nur eine umdrehende Bewegung, bald beide Bewegungen zugleich haben, wo denn entweder nur eine, oder auch beide Bewegungen durch den Stoß geändert werden. — Wir wollen in diesem Abschnitt, da die Theorie des schiefen und excentrischen Stoßes zu sehr verwickelten Untersuchungen führt, nur von dem geraden und centralen Stoß handeln, und dabei zuerst nur die Fälle betrachten, wo die stoßenden Körper nur eine progressive und keine umdrehende Bewegung haben, noch auch durch den Stoß eine solche erhalten. Zum Schluß wollen wir dann noch Einiges über den Stoß von Körpern, die sich um feste Achsen drehn, beifügen. — Ueber die Theorie des Stoßes im Allgemeinen findet man nähere Belehrung in Karsten's Lehrbegr. der Mathemat. Th. IV. Abschn. 18, und vorzüglich in: traité de Mécan. par Poisson, tome II. Liv. III. chap. 7. —

§. 101.

Die Wirkung, welche der Stoß von zwei Körpern auf die Geschwindigkeit und Richtung derselben hervorbringt, hängt außer von der Geschwindigkeit und Masse derselben, noch vorzüglich von dem Umstand ab, ob die aneinander stoßenden Körper federhart (Th. I. §. 16) sind, oder nicht. — Wenn zwei Körper an einander stoßen, so scheint uns die Veränderung, die ihre Bewegung dadurch erleidet, zwar in einem untheilbaren Zeitmoment zu geschehn. So wie indessen zur Hervorbringung einer jeden Wirkung in der Natur eine gewisse Zeit erfordert wird, so ist dieses höchst wahrscheinlich beim Stoß auch der Fall. Die aneinander stoßenden Körper drücken sich an den Stellen, wo sie sich treffen, in etwas zusammen. Hierdurch entsteht eine gewisse Spannkraft, und diese ist es, welche die Bewegung der Körper entweder beschleunigt, oder verzögert. Wir werden die Richtigkeit dieser Voraussetzung, welche die natürlichste ist, und die auch dadurch, daß die aus derselben hergeleiteten Gesetze des Stoßes mit der Erfahrung übereinstimmen, hinreichend gerechtfertigt wird, in der Folge

noch durch einige besondere Erfahrungen beweisen. Unter dieser Voraussetzung nun werden die durch den Stoß zusammengedrückten Theile entweder nach dem Stoße dieselbe Lage gegeneinander behalten, die sie durch den Stoß bekommen, oder sie werden ein Bestreben haben, zu ihrer vorigen Lage zurückzukehren; so daß der Körper seine vorige Gestalt wieder erhält. Von Körpern der letzten Art sagt man, sie seyen federhart, oder sie besitzen Federkraft. Dieselben können dabei sowohl hart als weich seyn. Wir wollen zuerst von dem Stoße der nicht federharten Körper handeln.

§. 102.

Wenn zwei Körper A, B, gegeneinander stoßen, so entsteht dadurch, daß der Körper A in den von B und eben so B in den von A eingenommenen Raum einzudringen strebt, an den Stellen, wo sie zusammentreffen, eine Spannkraft. Sind die Körper A und B nicht federhart, so wird diese Spannkraft so lange auf beide Körper wirken, bis die Geschwindigkeiten beider Körper gleich sind. Da nämlich alsdann Keiner der beiden Körper mehr in den Raum, den der andere einnimmt, einzudringen strebt, und die zusammengepreßten Theile eben wenig ein Bestreben haben, ihre vorige Lage wieder einzunehmen, so hört alle Wirkung des Stoßes auf. Daher ist nach dem Stoße die Geschwindigkeit von A der von B gleich. Nehmen wir also an, die Körper A, B, beide ohne Federkraft, stoßen gerade und central gegeneinander, und zwar bewegen sich beide nach derselben Richtung, doch mit ungleichen Geschwindigkeiten. Die Masse des ersten sey $= M$, die des zweiten $= N$, die Geschwindigkeit des ersten, welche die größte sey, $= c$, die des zweiten $= d$. Die Spannkraft, welche zwischen den beiden Körpern entsteht, wird zwar nicht während der ganzen Dauer des Stoßes von gleicher Stärke bleiben. Wenn wir uns aber die obschon kleine Zeit, welche der Stoß dauert, noch in unendlich viele gleiche Theile, wovon jeder $= t$, getheilt denken, so können wir während der Dauer eines solchen Zeittheilchens die Spannkraft als unver-

änderlich annehmen. Man denke sich die Größe dieser Spannkraft, in Gewicht ausgedrückt, sey für die verschiedenen nach einander folgenden Zeittheilchen P, P', P'' u. s. f. Die erste P ertheilt einer Masse N in der Zeit t eine Geschwindigkeit $= \frac{g.P}{N}.t$. Daher wird, da sie den minder schnellen Körper (B) zu beschleunigen strebt, die Geschwindigkeit desselben nach dem ersten Zeittheilchen $= d + \frac{g.P}{N} t$, eben so nach dem zweiten, dritten u. s. f. $d.t + g.\frac{P.t}{N} + \frac{g.P'.t}{N}$; $d + \frac{g.Pt}{N} + \frac{g.P't}{N} + \frac{g.P''.t + \ldots}{N} = d + \frac{g.t}{N}.$ $(P + P' + \ldots)$. Drückt man also die Summe aller P, die vom Anfang bis zum Ende des Stoßes Statt finden, durch S.P aus, und setzt die Geschwindigkeit, die B am Ende des Stoßes hat, = r, so hat man

$$1)\ r = d + \frac{g t}{N}.\ S.(P).$$

Der erste Körper A erhält durch die Kräfte P, P' u. s. f. in der Zeit t die Geschwindigkeit $\frac{g.Pt}{M}$, $\frac{g.P't}{M}$ u. s. f. Da aber diese Spannkräfte die Bewegung des Körpers A zu verzögern streben, so hat man, wenn die Geschwindigkeit von A am Ende des Stoßes = q gesetzt wird,

$$2)\ q = c - \frac{g t}{M}\ S.P.$$

Multiplicirt man 1) mit N und 2) mit M, und addirt beide Produkte, so erhält man

$$3)\ M.q + N.r = Mc + N.d.$$

Allein nach dem Stoße ist q = r. Hierdurch verwandelt sich 3) in

$$4)\ (M + N)\ q = Mc + Nd,$$

also $5)\ q = \frac{Mc + Nd}{M + N}$.

Man erhält also die Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoße, wenn man die Summe der Größen der Bewegung des einen und andern in die Summe ihrer Massen gleichförmig vertheilt. — Aus der Formel 5) lassen sich alle Gesetze des geraden und centralen Stoßes von Körpern, die nicht federhart sind, herleiten.

α) Ist der Körper B, worauf A stößt, in Ruhe, so erhält man

$$6)\ q = \frac{Mc}{M+N}.$$

β) Ist die Richtung des zweiten Körpers B der von A entgegengesetzt, so braucht man nur d negativ zu nehmen. Hierdurch erhält man

$$7)\ q = \frac{Mc - Nd}{M+N}.$$

Ist Nd größer, als Mc, so wird q negativ, d. h. die Körper A, B bewegen sich nach dem Stoß nach einer Richtung, die der, welche A vor dem Stoß hatte, und die wir als positiv angenommen haben, gerade entgegengesetzt ist.

γ) Stößt der Körper A senkrecht gegen eine unbewegliche Ebene, so wird natürlich die Bewegung desselben, wenn er nicht federhart ist, gänzlich aufgehoben, d. h. q ist $= 0$. Dasselbe erhält man, wenn man in 5) $N = \infty$, und $d = 0$ setzt.

δ) Die Geschwindigkeit nach dem Stoße kommt immer derjenigen Geschwindigkeit am nächsten, welche der Körper hatte, dessen Masse am größten ist. Wenn nämlich die Körper A, B vor dem Stoß sich nach derselben Richtung bewegen, wo dann das Nämliche auch nach dem Stoße Statt findet, so erhält man

$$8)\ c - q = \frac{N(c-d)}{M+N};\ \text{hingegen}$$

$$9)\ q - d = \frac{M(c-d)}{M+N}.$$

Ist also $M > N$, so ist $q - d > c - q$. — Bewegen A, B sich nach entgegengesetzten Richtungen, so braucht man nur

d negativ anzunehmen, wodurch, wenn $M > N$, immer $q - d > c - q$ bleibt. Hier ist die Geschwindigkeit c als positiv angenommen worden. Daher bedeutet $c - q$ dasjenige, was der Körper M an positiver Geschwindigkeit verliert, und $q - d$ das, was N an positiver Geschwindigkeit gewinnt. Es ist folglich zu bemerken, daß wenn durch den Stoß die Richtung eines der stoßenden Körper in die entgegengesetzte verwandelt wird, sein Verlust oder Gewinn an Geschwindigkeit derjenigen, die er schon hatte, und der neu erhaltenen zusammengenommen gleich ist.

§. 103.

Wenn zwei nicht federharte Körper gegeneinander stoßen, so hört, sobald die Geschwindigkeit des einen der des andern gleich geworden ist, alle Wirkung des Stoßes auf. Sind aber die Körper federhart, so fangen alsdann die zusammengedrückten Theile an, sich wieder auszudehnen, wobei die Theile des einen Körpers denjenigen des andern zum Stützpunkt dienen. Ist der Körper vollkommen federhart, d. h. stellt er seine Gestalt völlig, und in derselben Zeit, wieder her, worin er sie veränderte, so muß dadurch die Einwirkung des einen Körpers auf den andern verdoppelt werden, d. h. wenn beide Körper sich nach derselben Richtung bewegen, so ist der Verlust an Geschwindigkeit, den der schnellere (A) erleidet, und eben so die Zunahme, die der langsamere (B) erhält, doppelt so groß, als es der Fall seyn würde, wenn die Körper nicht federhart wären. Bewegen sich die Körper nach entgegengesetzten Richtungen, so erleidet derjenige (A), dessen Geschwindigkeit als positiv betrachtet wird, den doppelten Verlust, und der andere (B) erhält die doppelte Zunahme, als es für Körper ohne Federkraft der Fall ist. Nun ist aber nach (§. 102. 8, 9) der Verlust für A, wenn die Körper nicht federhart sind, $= \frac{N(c-d)}{M+N}$, und die Zunahme für B $= M\frac{(c-d)}{M+N}$. Verdoppelt man beide Werthe, subtrahirt als-

dann den ersten, und addirt den zweiten zu den Geschwindigkeiten c, d, welche die Körper vor dem Stoße hatten, so erhält man, wenn die Geschwindigkeit von A nach dem Stoße $= r$, die von $B = s$ gesetzt wird, wenn die Körper federhart sind.

$$1)\ r = c - \frac{2N(c-d)}{M+N},$$

$$\text{oder } 2)\ r = \frac{(M-N)c + 2N.d}{M+N},$$

$$3)\ s = d + \frac{2M(c-d)}{M+N},$$

$$4)\ s = \frac{(N-M)d + 2Mc}{M+N}.$$

Wir wollen die so eben gefundenen Formeln noch auf einige besondere Fälle anwenden.

α) Ist $M = N$ und $d = o$, d. h. bewegt die Masse M sich vor dem Stoße gar nicht, so erhält man

$$5)\ r = o;\ s = \frac{2Mc}{2M} = c,$$

d. h. wenn ein federharter Körper A auf einen andern B von gleicher Masse, der in Ruhe ist, stößt, so verliert der erste A seine Bewegung ganz, und der zweite geht mit der Geschwindigkeit des ersten fort.

β) Bewegen zwei federharte Körper von gleicher Masse sich mit gleichen Geschwindigkeiten gerade gegeneinander, so ist $M = N$, $d = -c$. Hierdurch erhält man aus 3) und 4)

$$6)\ r = \frac{2Md}{2M} = d = -c,$$

$$7)\ s = \frac{2Mc}{2M} = c.$$

d. h. beide Körper behalten ihre Geschwindigkeiten bei, verwandeln aber ihre Richtung in die entgegengesetzte, so daß sie sich nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit von einander entfernen, womit sie sich vor demselben einander näherten.

§. 104.

Wir sind im Vorigen bei der Entwickelung der Gesetze des Stoßes von einigen Voraussetzungen ausgegangen, die, so einfach und natürlich sie auch sind, doch noch eines nähern Beweises bedürfen. Dieser Beweis liegt nun fürs Erste in der Uebereinstimmung, welche die von uns gefundenen Gesetze mit der Erfahrung zeigen. Die Versuche hierüber stellt man am bequemsten so an, daß man den stoßenden Körpern die Kugelgestalt gibt, und dieselben an vertikalen Faden (wie Pendel) dicht nebeneinander aufhängt. Hebt man alsdann Eine dieser Kugeln auf, und überläßt sie sich selbst, so wird sie, indem sie einen Bogen durchläuft, zu ihrer ersten Lage zurückkehren, und der andern Kugel, wogegen sie stößt, eine Bewegung ertheilen. Bewegen die Kugeln sich längs einem in Grade eingetheilten Kreisbogen, so kann man, wenn man den Bogen, den die Kugeln theils beim Fallen, theils beim Aufsteigen beschreiben, mißt die Geschwindigkeit beider Körper sowohl vor, als nach dem Stoße (nach dem, was in den vorhergehenden Abschnitten gelehrt worden) finden. — Will man indessen die eben vorgetragene Theorie durch Versuche der Art prüfen, so ist noch Folgendes zu bedenken:

I. In (§. 102.) setzten wir Körper ohne alle Federkraft, hingegen (§. 103.) Körper mit vollkommener Federkraft voraus. Es fragt sich also vor allen Dingen, ob es wirklich Körper sowohl der einen, als andern Art gibt, und woran man sie erkennt. Was die federharten betrifft, so gibt es allerdings Körper, deren Federkraft innerhalb gewisser Gränzen als absolut angesehen werden kann. Braucht man z. B. zu den eben angeführten Versuchen Kugeln von Elfenbein, so stimmen die Resultate fast genau mit denjenigen, welche die Rechnung gibt, überein. Auch springt eine Kugel von Elfenbein oder Marmor, die man von einer gewissen, nicht zu großen, Höhe auf eine horizontale marmorne Tafel fallen läßt, fast genau bis zu derselben Höhe zurück. Vergrößert man aber diese Höhe über eine gewisse Gränze, so bleibt die Höhe, bis zu welcher die Kugel zurückspringt, merklich hinter derjenigen,

wovon sie herabgefallen, zurück. *) Es gibt also für jeden federharten Körper eine gewisse Gränze, über welche hinaus seine Federkraft nicht mehr vollkommen ist. Eben so möchte es wohl in der Natur nicht leicht einen Körper geben, dem man unbedingt alle Federkraft absprechen könnte. Es scheint vielmehr, daß auch diejenigen, welche bei geringen Zusammenpressungen fast ganz weich sind, dennoch, wenn sie schnell und stark zusammengepreßt werden, merkliche Spuren von Federkraft zeigen. Man muß daher, wenn man die eben erklärten Gesetze des Stoßes der nicht federharten Körper durch die Erfahrung prüfen will, alle zu schnellen Bewegungen vermeiden, wie denn auch bei der so eben beschriebenen Art die Versuche anzustellen, deren von selbst nicht wohl vorkommen können. Wählt man dabei noch die Materie, woraus die Körper bestehen, gehörig aus, gebraucht man Kugeln aus einem nicht zu harten Holz, oder von Blei, von ungebranntem Thon u. s. f., so stimmen die Versuche mit der Theorie fast genau überein.

II. Wenn die Kugeln, die man aneinander stoßen läßt, sich auf einer festen Ebene bewegen, und zugleich eine umdrehende Bewegung haben, etwa wie beim Billardspiel, so weicht die Erfahrung mehr oder minder von der Theorie ab. Beim geraden und centralen Stoße von zwei homogenen Kugeln hat zwar die Umdrehungsbewegung an und für sich keinen Einfluß auf die Schnelligkeit der progressiven Bewegung weder vor, noch nach dem Stoße. Allein wegen der Reibung an der Fläche, worauf die Kugeln sich bewegen, wird jede umdrehende Bewegung, wobei die Umdrehungsachse nicht auf

*) Merkwürdig ist folgender Versuch: Wenn man den Stiel einer Tabakspfeife mit einem Messer oder einer Feile rund herum einkerbt, und zwar an einer Stelle, daß der Stiel seiner Länge nach dadurch in zwei sehr ungleiche Theile, wovon einer etwa $\frac{1}{10}$, oder $\frac{1}{20}$ des andern ist, getheilt wird, dann den Stiel mit dem längern Theil nach unten gekehrt, von einer beträchtlichen Höhe, etwa 30 Fuß, herabfallen läßt, so springt das obere, durch den Feilstrich abgetheilte Stückchen höher, als es gefallen ist.

der Fläche senkrecht steht, in eine fortschreitende übergehn. *) Wenn daher eine Billardkugel auf eine andere ruhende von gleicher Masse stößt, so wird nicht, wie man nach (§. 103. α. 5) schließen müßte, die Stoßende in Ruhe kommen; sondern, wenn ihre Umdrehungsbewegung so beschaffen ist, daß dabei der Punkt der Kugel, welcher die Fläche berührt, nach der entgegengesetzten Richtung fortgeht, nach welcher der Mittelpunkt sich bewegt, so wird die Stoßende der Gestoßenen nachlaufen. Dreht sich aber die stoßende Kugel nach einer der eben angenommenen entgegengesetzten Richtung, so wird sie nach dem Punkte zurücklaufen, wovon sie ausging. — Alle künstlichen Stöße beim Billardspiel beruhen darauf, daß man die Kugel so trifft, daß sie außer der progressiven auch die gehörige umdrehende Bewegung erhält.

§. 105.

Wir sind bei Entwickelung der Gesetze des Stoßes von der Voraussetzung ausgegangen, daß (§. 101.) die Mittheilung der Bewegung durch den Stoß, obschon in einer für uns unmeßbaren Zeit, doch nicht in einem untheilbaren Zeitmoment, sondern nur nach und nach geschehe. Was nun die federharten Körper betrifft, die ihre Gestalt beim Stoß ändern und wieder erhalten, so ist es offenbar, daß eine solche Veränderung der Gestalt, so geringe sie seyn mag, nicht plötzlich, sondern nur durch alle möglichen Zwischengrade geschehen kann. Indessen ließe sich auch wohl die Frage aufwerfen: ob die federharten Körper wirklich beim Stoß ihre Gestalt ändern. Daß dieses nun der Fall ist, erhellt aus folgenden Versuchen:

1) Wenn man eine glatte Marmortafel, von dunkler Farbe, dünn mit Oel bestreicht, und eine Kugel von Elfenbein oder Marmor mehrmals mit Gewalt gegen dieselbe wirft, so

---

*) Die Reibung ist nämlich als eine Kraft anzusehn, welche den Punkt (der Kugelfläche) der sich an der Fläche reibt, nach einer Richtung, welche der seinigen entgegengesetzt ist, fortzutreiben strebt. Hierdurch wird aber (nach §. 98.) die fortschreitende Bewegung des Körpers eben so geändert, als ob die Kraft im Schwerpunkt selbst angebracht wäre.

bemerkt man auf der Tafel, wenn man sie schief gegen das Licht betrachtet, eine Menge von Kreisen. Diese könnten, da eine Kugel eine Ebene nur in Einem Punkte berührt, nicht entstehn, wenn die Kugel sich nicht in etwa platt drückte. Da man nun aber auf der Kugel von diesen Eindrücken nichts gewahr wird, so muß dieselbe beim Stoß ihre Gestalt verändert, und nachher wieder hergestellt haben.

2) Wenn man mehrere elfenbeinerne Kugeln von gleichem Durchmesser an vertikalen Faden dicht nebeneinander aufhängt, die erste aufhebt, und sie gegen die neben ihr hangende stoßen läßt, so bleiben alle Kugeln, von der ersten bis zur vorletzten, in Ruhe, und nur die letzte erhält dieselbe Geschwindigkeit, welche die erste hatte. Hebt man aber die erste und zweite Kugel zugleich auf, und läßt beide im nämlichen Augenblick gegen die dritte stoßen, so erhalten am andern Ende zwei Kugeln eine Bewegung, und zwar von derselben Geschwindigkeit, als die erste und zweite Kugel hatten. — Läßt man überhaupt an dem einen Ende 3, 4 ... n Kugeln auf die übrigen stoßen, so gerathen am andern Ende 3, 4 ... n Kugeln in Bewegung. Man könnte glauben, wenn man die erste Kugel gegen die zweite stoßen läßt, so wären alle übrigen Kugeln nur als Eine von einer größern Masse anzusehn, und man müßte dem gemäß die Geschwindigkeit nach dem Stoße bestimmen. Eben so könnte man, wenn man an Einem Ende zwei Kugeln aufhebt, dieselbe als Eine von doppelter Masse in Rechnung bringen. Allein aus dem ersten Versuch folgt, daß die erste Kugel zuerst der zweiten ihre Bewegung mittheilt, wodurch sie selbst in Ruhe geräth; daß darauf die zweite diese Bewegung der dritten u. s. f. mittheilt, bis sie endlich in die letzte übergeht, welche, da sie an keine andere stößt, dieselbe beibehält. Bei dem zweiten oben angeführten Versuch theilt zuerst die zweite Kugel der dritten ihre Bewegung mit. Hierdurch verliert die zweite ihre Bewegung. Allein sie erhält sie sogleich von der ersten wieder, und sie pflanzt auch diese auf die andern Kugeln fort, so daß am andern Ende zwei Kugeln in Bewegung gerathen. — Durch diese Versuche ist es hinreichend bewiesen, daß bei dem Stoße der federharten Körper

die Mittheilung des Stoßes nur allmählig geschieht. Da man nun der Analogie nach von den übrigen Körpern dasselbe annehmen darf, so ist dadurch die im Eingang dieses §. angeführte Voraussetzung hinreichend gerechtfertigt.

§. 106.

Obschon wir in diesem Abschnitt nur von dem geraden und centralen Stoß (§. 100.) handeln, so wollen wir doch einige leichte Fälle des schiefen und excentrischen Stoßes näher betrachten. Hiervon ist der einfachste, wenn ein Körper, dem wir, um die Sache noch mehr zu vereinfachen, die Gestalt einer Kugel geben wollen, unter einem schiefen Winkel gegen eine unbewegliche Ebene stößt. Stößt eine Kugel (fig. 48.), deren Mittelpunkt o sich nach einer Richtung mo, die gegen die Ebene ab schief geneigt ist, auf dieselbe bei r, so denke man sich durch mo eine Ebene mora senkrecht auf die Ebene ab gelegt, welche dieselbe in der Linie ab schneide. Zieht man alsdann durch den Mittelpunkt o die Linie eol # ab, so ist moe der Winkel, den die Richtung der Kugel mit der Ebene macht. Stellt mo die Geschwindigkeit der stoßenden Kugel vor, so zerlege man dieselbe in zwei andere so, eo, wovon die erste senkrecht auf der Ebene ab, und die andere mit derselben parallel ist. Sind nun

a) weder die Materie der Kugel, noch die des Körpers, worauf sie stößt, federhart, so hebt die Festigkeit der Ebene die Geschwindigkeit nach so gänzlich auf, der nach eo hingegen setzt sie kein Hinderniß entgegen. Die Kugel wird also nach dem Stoße sich mit der Geschwindigkeit eo nach ol längs der Ebene ab fortbewegen. Sind aber

b) die Kugel und die Ebene, worauf sie stößt, vollkommen federhart, so wird durch die Festigkeit der Ebene die Geschwindigkeit nach so auch zwar aufgehoben, allein durch die Federkraft erhält die Kugel eine völlig gleiche, jedoch nach gerade entgegengesetzter Richtung (os) wieder. Da sie nun die Geschwindigkeit eo nach ol beibehält, so stellt, wenn man ol = oe nimmt, und das Rechteck sl construirt, die Diagonale of desselben die Richtung und Geschwindigkeit dar,

womit der Mittelpunkt der Kugel nach dem Stoße fortgeht; wo denn leicht einzusehn, daß $<$ fol $=$ moe — das Perpendikel ros vom Schwerpunkt o des stoßenden Körpers auf die Ebene, wogegen er stößt, gefällt, heißt das Einfallsloth (cathedus incidentiae, axe d'incidence), der Winkel mos, den die Richtung (mo) des bewegten Körpers mit dem Perpendikel os vor dem Stoße macht, heißt der Einfallswinkel (angulus incidentiae, angle d'incidence) und der Winkel fol, den seine Richtung nach dem Stoße mit demselben macht, der Zurückwerfungswinkel (angulus reflexionis, angle de réflexion). Aus dem so eben Vorgetragenen folgt: Wenn ein federharter Körper auf eine unbewegliche, ebenfalls federharte, Ebene unter einem schiefen Winkel stößt, so wird er von derselben so zurückgeworfen, daß er immer in der Ebene meos des Einfallswinkels bleibt, und seine Richtung (of) auf der einen Seite des Einfallsloths (os) mit diesem denselben Winkel macht, wie vor dem Stoße *) auf der andern (angulus incidentiae est aequalis angulo reflexionis).

§. 107.

Zwei Kugeln, deren Mittelpunkte e, o (fig. 49.) sich nach den Richtungen ne, go, die in derselben Ebene liegen, und mit Geschwindigkeiten, die ebenfalls durch ne, go vorgestellt werden, bewegen, stoßen bei α gegeneinander. Alsdann findet man die Wirkung des Stoßes auf folgende Art: Durch α sey eine Ebene gelegt, welche beide Kugeln bei α berührt, und ab sey die Durchschnittslinie dieser Ebene mit derjenigen (meo), worin sich die Mittelpunkte beider Kugeln bewegen. Verbindet man beide Mittelpunkte durch die Linie eo, so geht diese durch α, und man hat $< e\alpha a = R$, $o\alpha b = R$. Man zerlege jede der Geschwindigkeiten ne, go in zwei andere, die erste in me, pe, die zweite in so, gs, wovon eine in die Linie eo fällt, und die andere senkrecht darauf steht, oder $\#$ ab. Vermöge der letzten Bewe-

*) Nach demselben Gesetze werden auch die Lichtstrahlen von spiegelnden Flächen zurückgeworfen.

gung (pe, gs) wirken die Körper gar nicht aufeinander ein, und vermöge der ersten me, so stoßen sie gerade und central gegeneinander. Bestimmt man also nach dem in diesem Abschnitt Erklärten die Geschwindigkeiten beider Kugeln nach der Richtung eo, und setzt jede derselben mit der andern, die ♯ ab zusammen, so erhält man die Richtung und Geschwindigkeit einer jeden nach dem Stoße.

§. 108.

Wir wollen nun noch den Fall untersuchen, wenn ein Körper, der sich um eine unbewegliche Achse dreht, gegen einen andern ruhenden stößt (wie ein Pendel z. B., das bei seinem Schwunge auf eine ruhende Kugel träfe). Um die Untersuchung noch mehr zu vereinfachen, wollen wir annehmen, der gestoßene Körper bleibe nach dem Stoß mit dem stoßenden verbunden, und drehe sich mit demselben um (etwa, wie wenn die Kugel in dem Pendel stecken bliebe. Unter dieser Voraussetzung ist es gleichgültig, ob die aneinanderstoßenden Körper federhart sind, oder nicht, eben so, ob der Stoß central und gerade oder schief und excentrisch ist. Wir wollen noch überdem annehmen, der gestoßene Körper sey so klein, daß man alle Punkte desselben als gleichweit von der Umdrehungsachse entfernt, oder daß man seine ganze Masse in Einem Punkt (etwa in demjenigen, wo der stoßende Körper ihn trifft) vereinigt annehmen kann. Denkt man sich nun den stoßenden Körper in unendlich viele, unendlich kleine Theile (Elemente) getheilt, und bezeichnet die Gewichte derselben durch p, p', p'' u. s. f., ihre Entfernungen von der Umdrehungsachse durch r, r', r'' u. s. f., die Umdrehungsgeschwindigkeit (in Theilen des Halbmessers ausgedrückt) vor dem Stoße durch α, nach demselben durch β, so ist die wahre Geschwindigkeit der verschiedenen Elemente vor dem Stoße $= \alpha r$, $\alpha r'$, $\alpha r''\ldots$, nach dem Stoße $= \beta r$, $\beta r'\ldots$ Daher ist die Größe der Bewegung der Elemente der Ordnung nach

1) Vor dem Stoße — $\alpha r p$, $\alpha r' p'$, $\alpha r'' p''$ — — —

2) Nach dem Stoße — $\beta r p$, $\beta r' p'$, $\beta r'' p''$ — — —

Ist ferner die Masse des gestoßenen Körpers $= M$, die Ent-

fernung des Punktes, wo er getroffen wird, von der Achse $= d$, so ist seine Geschwindigkeit nach dem Stoße $= \beta . d$, und die Größe seiner Bewegung $= \beta . d . M$. Man kann die Größe der Bewegung eines jeden Elements als eine an demselben wirkende Kraft ansehn, und zwar müssen (nach der Regel des d'Alembert) die Kräfte vor dem Stoße, wenn letztere nach einer der ihrigen entgegengesetzten Richtung angebracht werden, mit den Kräften nach dem Stoße im Gleichgewicht seyn. Hierzu wird aber hier erfordert, daß die Summe der Momente aller Kräfte, vor und nach dem Stoße zusammengenommen, in Beziehung auf die Umdrehungsachse $= 0$ sey. Multiplicirt man also jede Kraft mit dem zugehörigen Hebelarm, und bedenkt, daß nach dem Stoße auch die gestoßene Masse (M) einen Theil des Körpers ausmacht, also die Größe ihrer Bewegung ebenfalls in Rechnung gebracht werden muß, so hat man

$$3)\ \alpha r^2 p + \alpha r'^2 p' + \ldots = \beta d^2 M + \beta r^2 p + \beta r'^2 p' + - - -;$$

oder, wenn man die schon oft gebrauchte Bezeichnungsart auch hier anwendet,

$$4)\ \alpha S . r^2 p = \beta (d^2 M + S . r^2 p);$$

$$\text{also } 4)\ \frac{\alpha S . r^2 p}{d^2 M + S . r^2 p} = \beta.$$

Hier ist $S . r^2 p$ das Moment der Trägheit des stoßenden, und $d^2 M$ das des gestoßenen Körpers. Setzt man $S . r^2 p = V$, so wird

$$5)\ \beta = \frac{\alpha V}{V + d^2 M}.$$

Zusatz. Durch eine ganz ähnliche Anwendung der d'Alembertschen Regel findet man auch die Umdrehungsgeschwindigkeit, die ein um eine feste Achse beweglicher Körper durch den Stoß eines andern erhält, dessen Richtung in einer auf der Achse senkrechten Ebene liegt, und welcher nach dem Stoß mit dem erstern verbunden bleibt. Setzt man die Geschwindigkeit des stoßenden $= c$, und behält die Bedeutung der übrigen Buchstaben, so wie im §., bei, so erhält man

1) $\beta.(V + d^2 M) = Mcd$;

also 2) $\beta = \frac{Mc.d}{V + d^2 M}$.

§. 109.

Die Umdrehungsgeschwindigkeit $\beta = \frac{\alpha V}{V + d^2 M}$ (§. 108. 5), welche der umdrehende Körper nach dem Stoße beibehält, ist bei gleicher Masse M des gestoßenen Körpers um so kleiner, je größer d oder die Entfernung des gestoßenen Körpers von der Umdrehungsachse ist. Anders verhält es sich aber mit der wirklichen Geschwindigkeit, die der gestoßene Körper erhält. Dieselbe ist nämlich $= \beta.d$. Man hat also, wenn man sie durch c' bezeichnet

1) $c' = \beta.d = \frac{\alpha V d}{V + d^2 M}$.

Dieser Ausdruck von c' wird $= 0$, sowohl, wenn man $d = 0$, als auch, wenn man $d = \infty$ setzt. Dieses führt auf die Vermuthung, ob es nicht einen Werth von d gebe, für welchen c', unter übrigens gleichen Umständen, am größten wird. Um ihn zu finden, suche man aus (1) den Werth, den man d geben muß, damit c' einen bestimmten Werth erhält. Die Rechnung gibt

2) $(V + d^2 M) c' = \alpha V d$,

3) $d^2 - \frac{\alpha V}{M.c'} . d = - \frac{V}{M}$.

Ergänzt man das Quadrat, und sucht d, so kommt

4) $d = \frac{\alpha V \pm \sqrt{(\alpha^2 V^2 - 4MVc'^2)}}{2Mc'}$.

In dem Ausdruck 4) sind auf der rechten Seite α, V, M Größen, die in einem bestimmten Fall durchaus unveränderlich, und in jedem Fall positiv sind. Man darf daher, wenn der Werth von d möglich bleiben soll, c' nicht so groß annehmen, als man will. Vielmehr ist der größte Werth, den man c' geben darf, derjenige, wofür das unter dem Wurzelzeichen Befindliche $= 0$ wird, (indem es für ein noch größe-

res c' negativ, also die Wurzel unmöglich wird). Hierdurch erhält man für diesen größten Werth von c'

$$5)\ \alpha^2 V - 4 M V^2 c'^2 = 0,$$

$$6)\ \tfrac{1}{2} \alpha \sqrt{\left(\frac{V}{M}\right)} = c'.$$

Demnach erhält man aus 4)

$$7)\ d = \frac{\alpha V}{2 M c'},$$ oder wenn man für c' den Werth 6) setzt

$$8)\ d = \sqrt{\left(\frac{M}{V}\right)}.$$

Bei dieser Entfernung von der Umdrehungsachse erhält also der gestoßene Körper M die größte Geschwindigkeit. Diese Entfernung ist die Wurzel aus dem Quotient, der herauskommt, wenn man die Masse M des gestoßenen mit dem Moment der Trägheit des stoßenden Körpers dividirt. Die Größe dieser Entfernung hängt also nicht allein von der Natur des stoßenden, sondern auch von der Masse M des gestoßenen Körpers ab, bleibt aber für jede Größe der Umdrehungsbewegung (α) sich gleich. Der Werth $\beta = \frac{M c . d}{V + d^2 M}$ (No. 2. vorigen §. Zus.) stellt die Umdrehungsgeschwindigkeit dar, welche ein um eine Achse beweglicher Körper durch den Stoß eines andern erhält, der ihn in einer Entfernung d von der Achse mit der Geschwindigkeit c trifft. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem von $c' = \frac{\alpha V d}{V + d^2 M}$ (No. 1. dieses §.), so sieht man, daß beide für denselben Werth von d am größten werden. *). Also in derselben Entfernung von der Achse, in welcher ein um eine Achse sich drehender Körper einen an-

---

*) Nämlich in $\frac{M c . d}{V + d^2 M} = M c . \left(\frac{d}{V + d^2 M}\right)$ sind M und c in demselben Falle unveränderliche Größen; daher wird $\frac{M c d}{V + d^2 M}$ am größten, wenn $\frac{d}{V + d^2 M}$ am größten wird, und eben so verhält es sich für c'.

dern, in Ruhe befindlichen, von bestimmter Masse (M) treffen muß, um diesem letztern bei gleicher Umdrehungsgeschwindigkeit die größte absolute Geschwindigkeit zu geben (in derselben Entfernung), muß auch ein bewegter Körper von derselben Masse M auf einen andern, in Ruhe befindlichen, und um eine Achse beweglichen Körper stoßen, um diesem bei gleicher absoluten Geschwindigkeit (des stoßenden) die größte Umdrehungsgeschwindigkeit zu geben. Wenn man vom Schwerpunkt eines um eine Achse beweglichen Körpers ein Perpendikel auf die Achse fällt, und auf dieses von der Achse aus die Entfernung trägt, bei welcher der Körper durch den Stoß eines andern von bestimmter Masse die größte Umdrehungsgeschwindigkeit erhält, so heißt der Endpunkt der so abgesteckten Linie der Mittelpunkt des Stoßes (centrum percussionis).

Anmerk. 1. Die Wirkung des Stoßes kommt in den (§. 108 — 109) betrachteten Fällen nur auf die Entfernung d des frei beweglichen Körpers von der Umdrehungsachse an. Es gibt also unzählig viele Punkte des um die Achse beweglichen Körpers, wo auch für denselben stoßenden Körper die Wirkung des Stoßes am größten ist, welche aber alle von der Achse gleichweit entfernt sind. Man nennt indessen (gerade so, wie es auch für den Schwingungspunkt geschieht) unter allen diesen Punkten nur denjenigen den Mittelpunkt des Stoßes, welcher in dem vom Schwerpunkt auf die Achse gefällten Perpendikel liegt. Hierdurch erhält das Wort Mittelpunkt des Stoßes, so lange der gestoßene und stoßende Körper dieselben bleiben, einen durchaus bestimmten, unzweideutigen Sinn.

Anmerk. 2. Einige Gelehrte vom ersten Range haben sich bei diesem Gegenstand zu irrigen Schlüssen verleiten lassen. Dieselben (unter andern Wallis, der erste, welcher (Mechan. Cap. XI. prop. XV.) den Ausdruck: Mittelpunkt des Stoßes gebraucht hat) verstehn unter diesem Punkt denjenigen, wo man sich den Stoß des ganzen Körpers völlig vereinigt denken kann, und zwar so, daß wenn er mit diesem Punkt auf einen andern unbeweglichen Punkt aufstößt, alle Wirkung des Stoßes aufhören würde, wenn auch die Achse, um welche er sich dreht, im Augenblick des Stoßes gar keinen Widerstand mehr leistete. Dieses ist also etwas ganz anderes, als was wir so eben unter dem Ausdruck: Mittelpunkt des Stoßes verstanden haben. Der Mittelpunkt des Stoßes in dem hier zuletzt erklärten Sinne ist derjenige, in welchem die Summe der Produkte eines jeden Elements in seine Geschwindigkeit, nach einer der wirklichen Bewegung entgegengesetzten

Richtung angebracht, die Wirkung des Stoßes aufheben würde. Ist die Entfernung dieses Punktes von der Umdrehungsachse = h, so hat man, wenn die Buchstaben ihre im Vorigen angenommene Bedeutung behalten,

$$1)\ \alpha . h . S.(r.p) = \alpha . S.(r^2 p),$$

$$\text{also } 2)\ h = \frac{S.(r.p)}{S.(r^2 p)}.$$

Hier haben nun wieder Einige den Ausdruck S.(r p) für das statische Moment des ganzen Körpers gegen die Umdrehungsachse (wenn man sich nämlich den Schwerpunkt mit der Achse in derselben horizontalen Ebene denkt) gehalten; woraus sie denn irrig geschlossen, daß der Mittelpunkt des Stoßes mit dem früher betrachteten Schwingungspunkt oder Mittelpunkt des Schwunges (centrum oscillationis) einerlei sey. Allein r.p ist das Produkt aus der Masse oder dem Gewicht eines Elements in seine wirkliche Entfernung von der Achse, oder in das von ihm auf dieselbe gefällte Perpendikel, wogegen das statische Moment desselben (in dem hier angenommenen Falle, daß der Schwerpunkt mit der Achse in derselben horizontalen Ebene liegt) das Produkt aus der Masse des Elements in die auf den Horizont reducirte Entfernung desselben von der Achse ist. Also nur, wenn der Körper, der sich um die Achse dreht, nach der auf die Achse senkrechten Richtung eine sehr unbeträchtliche Ausdehnung hat (wenn er eine mathematische Linie, oder ein langer Cylinder von sehr kleinem Durchmesser ist) ist S.r.p dem statischen Moment gleich, wo denn der Mittelpunkt des Stoßes (im Sinne von Wallis genommen) mit dem Schwingungspunkt übereinkommt. — Was indessen diese Art der Vorstellung überhaupt betrifft, so kann man freilich den Puntt, den Wallis bezeichnen wollte, Mittelpunkt des Stoßes nennen, wo es nur nöthig wäre, dem von uns so genannten Punkt einen andern Namen zu geben. Allein diejenigen, welche dem erstern Punkt den Namen: Mittelpunkt des Stoßes beilegen, glauben wirklich irriger Weise, daß in demselben die Wirkung des Stoßes am stärksten sey, so daß ein ruhender Körper, wenn er von diesem Punkte eines sich um eine feste Achse drehenden Körpers getroffen würde, die größte Geschwindigkeit erhielte. Allein dieses würde nur der Fall seyn, wenn die Achse gar nicht fest oder gar nicht da wäre. Allein die Festigkeit der Achse ist auch eine Kraft, welche auf den gestoßenen Körper wirkt, worauf aber bei jener irrigen Ansicht keine Rücksicht genommen wird. Denken wir uns z. B. (fig. 50) die Linie d a, die sich um den festen Punkt d nach a b dreht, treffe bei e auf die Kugel o. Liegt nun der Punkt e so, daß, wenn er völlig fest und d ganz frei wäre, die Linie sich nach dem Stoß um e nach

ab drehte, so wird, wenn c fest ist, die Festigkeit von c als eine nach c l wirkende Kraft anzusehn seyn, die also die Einwirkung der Linie auf die Kugel bei o vermehrt. *)

§. 110.

Eine sehr sinnreiche und wichtige Anwendung von dem in dem letzten (§.) Gelehrten hat der Engländer Robins (man sehe seine §. 39. Anmerk. angeführte Schrift) gemacht, um die Geschwindigkeit der Gewehrkugeln zu bestimmen, welches man später sogar auf die Geschützkugeln ausgedehnt hat. — Wenn nämlich ein schwerer, um eine horizontale Achse beweglicher, Körper durch den Stoß eines andern, der ihn an einem bestimmten Punkte trifft, in Bewegung gesetzt wird, so kann man, wenn man die Umdrehungsgeschwindigkeit, welche er erhält, kennt, die Geschwindigkeit, womit der stoßende sich vor dem Stoß bewegte, finden. Behalten die Buchstaben dieselbe Bedeutung, wie in den letzten (§.), so hat man (§. 108. Zus. 1. No. 2.) die erhaltene Umdrehungsgeschwindigkeit

$$1)\ \beta = \frac{M c d}{V + d^2 M},$$

also $$2)\ \beta \left(\frac{V + d^2 M}{M d}\right) = c.$$

Robins bediente sich zu seinen Versuchen eines Parallelepipedons von Eisen, dessen eine Seitenfläche mit einem starken, an derselben befestigten, Brette von Büchenholz bedeckt war. Dieser Körper war an eine etwa 5 Fuß lange Stange befestigt, die in einer horizontalen Achse steckte, um die sie sich, wie ein Pendel, frei drehn konnte. Das Gewicht des ganzen Pendels betrug etwa 56 Pfund. — Robins schoß nun Flintenkugeln

---

*) Nach dem (§. 109.) Erklärten ist die Entfernung d (7), wo die Wirkung auf den gestoßenen Körper am größten ist, um so kleiner, je größer M, so daß für $M = \infty$ die Entfernung $d = 0$. Sollte durch den Stoß irgend ein fester Körper, der auf einer völlig unbeweglichen Ebene liegt, zerschlagen werden, so könnte man $M = \infty$ setzen. Die Wirkung wäre also nach unserer Theorie um so stärker, je näher der zu zerschlagende Körper der Achse der Umdrehung wäre, wie dieses der Lehre vom Hebel völlig gemäß ist.

gegen das hölzerne Brett ab, und maß den Bogen, welcher das Pendel, auf diese Art in Bewegung gesetzt, durchlief, woraus er auf die Geschwindigkeit der Kugel schloß. Es kommt hierbei vor Allem darauf an, aus dem Bogen, den das Pendel durchläuft, die Umdrehungsgeschwindigkeit zu finden, die es durch den Stoß erhalten. Ist die Entfernung des Schwingungspunktes des Pendels von der Umdrehungsachse, wenn die Kugel in ihm haftet, $= f$, der Bogen, den das Pendel durchläuft, in Graden ausgedrückt $= \delta$, so ist die senkrechte Höhe, bis zu welcher der Schwingungspunkt steigt, $= f.\sin.\text{vers}.\delta$. Da nun die Bewegung des Pendels gerade so, wie die eines einfachen von der Länge f geschieht, so hat der Schwingungspunkt durch den Stoß eine Geschwindigkeit erhalten, mit welcher er, vertikal aufwärts geworfen, eine Höhe $= f.\sin.\text{vers}.\delta$ erreichte. Daher war seine Geschwindigkeit $= \sqrt{(2g.f.\sin.\text{vers}.\delta)}$ (§. 34. 7). Daher ist die Umdrehungsgeschwindigkeit des Pendels in Theilen des Halbmessers ausgedrückt $= \frac{\sqrt{(2gf.\sin.\text{vers}.\delta)}}{f} = \frac{\sqrt{(2g.\sin.\text{vers}.\delta)}}{\sqrt{(f)}}$. Setzt man dieses statt β in 2), so erhält man

$$3)\ c = \frac{(V + d^2 M).\sqrt{(2g.\sin.\text{vers}.\delta)}}{\sqrt{f}}.$$

Hier bedeutet M das Gewicht der Kugel, und d den Abstand des Punktes, wo sie das Pendel trifft, von der Umdrehungsachse. Um die Werthe von V und f zu finden, ließ Robins das Pendel schwingen, und zählte, wie viele Schwingungen es in einer gewissen Zeit machte. Hieraus findet sich nach dem, was bei der Lehre vom Pendel gesagt worden, leicht die Länge des einfachen Pendels, welches eben schnell als das hier angewendete schwingt. Er suchte nun ebenfalls den Abstand des Schwerpunkts von der Umdrehungsachse. Dieses kann geschehn, indem man das Pendel in horizontaler Lage auf einer ebenfalls horizontalen Unterlage so lange hin- und herschiebt, bis es im Gleichgewicht ist; oder indem man das Pendel um seine Achse so lange dreht, bis es in die horizontale Lage kommt, dann an einem willkührlichen Punkt desselben

eine Schnur befestigt, diese vertikal aufwärts, über eine Rolle gehn läßt, und an dem andern Ende der Schnur ein Gewicht aufhängt, welches das Pendel in seiner horizontalen Lage erhält. Ist dieses Gewicht = N, die Entfernung des Punktes, wo die Schnur befestigt ist, von der Achse = a, das Gewicht des Pendels = P, die Entfernung seines Schwerpunkts von der Umdrehungsachse = b, so hat man

$$4)\ b = \frac{a\,N}{P}.$$

Man hat ferner, wie aus der Lehre vom Pendel bekannt, wenn man die Länge des einfachen Pendels, das eben schnell schwingt, als das zum Versuch angewendete, = l setzt,

$$5)\ l = \frac{V}{b.P},$$

$$6)\ V = l.b.P.$$

Von der Größe l ist f um ein Weniges verschieden. f ist nämlich die Länge des einfachen Pendels, das eben schnell schwingt, als das angewendete, wenn die Kugel darin steckt. Man muß also, wenn man die größte Genauigkeit verlangt, nach dem Versuche, wenn die Kugel im Pendel steckt, die Schwingungen, die es in einer bestimmten Zeit macht, ebenfalls zählen und daraus f berechnen, oder man kann auch so verfahren. Das Moment der Trägheit (V) des Pendels wird durch die Kugel um $d^2 M$ vermehrt, oder es ist nach dem Versuche = $V + d^2 M$. Das statische Moment des Pendels erhält auch durch die Kugel einen Zuwachs, der sehr nahe = d.M *), so daß dasselbe nach dem Versuche = b.P + d.M. Hierdurch erhält man sehr nahe $f = \frac{V + d^2 M}{b.P + d.M}$.

*) Um das statische Moment der Kugel gegen die Umdrehungsachse zu finden, muß man ihr Gewicht M nicht mit d, sondern mit der Projection von d auf die durch den Schwerpunkt gezogene Vertikallinie multipliciren. Bei der Gestalt, die man füglich dem Pendel geben kann, wird d immer nur wenig von dieser Projection verschieden seyn, und wenn es ja nöthig wäre, wird es leicht seyn, diese Projection zu finden, und sie in dM statt d in Rechnung zu bringen.

Stellt man, wie gewöhnlich, mit demselben Pendel mehrere Versuche an, wo jedesmal die Kugel steckenbleibt, so muß man für jeden Versuch f besonders berechnen. Auch möchte es nützlich seyn, nach mehreren Versuchen f durch eine direkte Erfahrung, so wie oben bemerkt, zu bestimmen. Robins fand durch seine Versuche die Geschwindigkeit einer bleiernen Kugel von $\frac{1}{12}$ Pfund, bei einer Ladung von 12 Drachmen Pulver, nahe an 1600 Rhein. Fuß. Späterhin sind diese Versuche von andern, vorzüglich von Hutton (siehe seine §. 39. Anmerk. angeführte Schrift) auch auf Geschützkugeln von 1—3, ja bis 24 Pfund ausgedehnt worden. Das Pendel, dessen er sich bei seinen Versuchen bediente, wog mehrere tausend Pfund. Seinen Versuchen gemäß ist die Geschwindigkeit einer 24pfündigen Geschützkugel höchstens 2300 Fuß.

Anhang.

I.

Wir wollen nun noch zum Schluß die (schon §. 84. am Ende) erwähnte Beschreibung des Apparats, wodurch man die Länge des Sekundenpendels mit gehöriger Genauigkeit ermitteln kann, beifügen. Man hat dieser Apparate jetzt mehrere. Man bedarf dabei eines Werkzeugs, wodurch der Unterschied von zwei Längenmaßen, die beinahe gleich sind, mit der größten Genauigkeit gemessen werden kann. Man nennt ein solches Werkzeug einen Maßvergleicher (comparateur). Es gibt derselben vorzüglich zweierlei. Nämlich die Größe eines Längenmaßes ist entweder so gegeben, daß auf irgend einer prismatischen Stange eine feine Linie gerissen, und in dieser durch Punkte, oder eine andere, sie durchschneidende, Linie, die Gränzen des Maßes bestimmt sind; oder diese Gränzen bestimmen sich von selbst durch die Endflächen des Maßstabes, welche dann auf der Länge desselben genau senkrecht stehn müssen. Ein Maß der ersten Art heißt ein Maß mit Theilstrichen (étalon à traits); eines der zweiten Art heißt ein Maß mit

Endflächen (étalon à bouts). Die letztern scheinen zwar, weil die Endflächen genau senkrecht auf der Länge stehen müssen, nicht ganz den Grad der Zuverlässigkeit der ersten zu gewähren. Allein man versteht jetzt den Endflächen die erforderliche Lage mit großer Genauigkeit zu geben. Man bedient sich zur Vergleichung von Maßen dieser Art eines Vergleichers (comparateur), den man den Fühlhebel nennt. Er besteht im Wesentlichen (Fig. 51) aus einem Lineal von Metall, welches stark genug ist, um jede Beugung zu verhüten. An dem einen Ende ist senkrecht auf seiner Fläche ein in eine scharfe Kante auslaufendes Stück Metall T unbeweglich befestigt. Dieses dient als Stütze um das eine Ende des zu vergleichenden Maßes dagegen anzustemmen. Auf der Fläche des Lineals befindet sich ein viereckiger Rahmen, DDRR, welcher sich in einer Falze nach der Länge des Lineals bewegen, und vermittelst zwei starker Druckschrauben R, R an jeder Stelle befestigen läßt. Dieser Rahmen, der wesentlichste Theil des Werkzeugs, enthält einen Winkelhebel bcV, der sich um die feste Achse c drehen läßt. Die Arme des Hebels sind nicht gleich, sondern gewöhnlich ist der längere zehnmal so groß, als der kürzere. Der Endpunkt des größern bewegt sich längs eines Kreisbogens, welcher in kleine Theile, etwa von $\frac{1}{2}$tel Millimeter Länge, getheilt ist. Mit dem Endpunkt des größern Hebelarms bewegt sich zugleich ein an ihm befestigter Kreisbogen, der als Vernier *) dient, und so getheilt ist, daß man vermittelst desselben noch $\frac{1}{10}$tel eines Theils, oder $\frac{1}{50}$tel eines Millimeters messen kann. Da nun überdem der längere Arm zehnmal so groß ist, als der kürzere, so kann man eine Verschiebung des Endpunkts des kürzern Arms, wenn sie auch nur $\frac{1}{500}$tel Millimeter, oder $\frac{2}{1000}$ Millimeter beträgt, vermittelst dieses Werkzeugs messen. Um nun den Längenunterschied von zwei Maßstäben A, B, die sehr nahe gleich groß sind, zu finden, legt man den Einen auf die Fläche des Werkzeugs und stemmt ihn mit einer seiner Endflächen fest gegen T. Man

*) Die Einrichtung des Verniers findet man in meinem Lehrbuch der Geometrie (Anhang No. LXVI. S. 332) umständlich erklärt.

schiebt nun den beweglichen Rahmen gegen die andere Endfläche, und drückt ihn so lange gegen dieselbe an, bis der Anfangspunkt des Verniers nahe in der Mitte des getheilten Bogens steht. Man zieht alsdann die Schrauben R, R an, und entfernt sich einige Zeit von dem Werkzeuge, damit es sowohl selbst, als der zu vergleichende Maßstab die Temperatur der umgebenden Luft annehme. Nach einiger Zeit kehrt man zurück und beobachtet nochmals den Stand des Verniers, den man sich merkt. Man nimmt nun, ohne an den Rahmen zu rühren, den Maßstab A weg, und bringt an seine Stelle den Maßstab B, wobei man wegen der Temperatur wieder dieselbe Vorsicht beobachtet. Durch Vergleichung des Standes des Verniers mit dem bei der vorigen Beobachtung findet man alsdann den Unterschied beider Längen bis auf ein $\frac{2}{1000}$ eines Millimeters. Man muß bei diesen Messungen vorzüglich Sorge tragen, daß die Temperatur sich während derselben nicht ändert. Dieses wird, wenn man in einem geräumigen Zimmer, das weder geheitzt ist, noch von der Sonne beschienen wird, operirt, zwar nicht leicht der Fall seyn, doch muß man sich durch Beobachtung des Thermometers, welches man am besten mit den Maßstäben selbst in Berührung bringt, davon gänzlich versichern. Ueberhaupt kommt es häufig vor, daß das Längenmaß eines Körpers, eines Stabs z. B., welches man bei einer gewissen Temperatur kennt, für eine andere Temperatur sowohl des auszumessenden Körpers, als auch des Maßstabs, womit man ihn mißt, gesucht wird. — Wir wollen daher die Methode, wie diese Reduction vorgenommen werden muß, hier kurz erklären. Man setze die Länge eines Stabes, so wie man sie bei einer bestimmten Temperatur von d Graden über dem Gefrierpunkt gefunden hat, $= l$, die Länge desselben, wie man sie finden würde, wenn der Stab die Temperatur d' bekäme, aber das Maß, womit man ihn mißt, die Temperatur von d Graden behielte, $= l'$, endlich die gesuchte Länge, nämlich die für den Fall, wo der zu messende Stab die Temperatur d', und das Maß, womit man ihn mißt, die Temperatur d'' erhielte, $= l''$. Ist nun für die Materie, woraus der auszumessende Stab besteht, die Ausdehnung

(durch die Wärme) so, daß, wenn man die Länge bei der Eiskälte = 1 setzt, sie bei 1° Temperatur = 1 + m, also bei d° = 1 + md wird, so hat man offenbar

1) $l : l' = 1 + md : 1 + md'$,

also 2) $l' = \left(\frac{1 + md'}{1 + md}\right) l$.

Wird ferner die Materie, woraus der Maßstab besteht, so ausgedehnt, daß sich die Länge bei 0° zu der bei 1°, wie $1 : 1 + n$ verhält, so hat man

3) $l' : l'' = 1 + nd'' : 1 + nd$,

also 4) $l'' = \frac{(1 + nd)\, l'}{1 + nd''}$,

oder 5) $l'' = \frac{(1 + nd)(1 + md')\, l}{(1 + md)(1 + nd'')}$.

Gewöhnlich sucht man die Länge eines Stabes für den Fall, wo die Temperatur des Maßstabes = 0; indem die auf einem Maßstab angegebene Zahl von Fußen, Zollen u. s. f. sich meistens auf diese Temperatur bezieht. Daher ist in der Regel $d'' = 0$. In diesem Falle erhält man aus 5)

6) $l'' = \frac{(1 + nd)(1 + md')}{1 + md} \cdot l$.

Die Werthe von n, m muß man durch die Erfahrung bestimmen. Die genauesten Versuche geben für Messing, Eisen und Platina, welche Metalle bei physikalischen Geräthschaften am meisten gebraucht werden, folgende Ausdehnungen für Einen Grad Wärme der 80theiligen Scale, die Länge bei 0° = 1 gesetzt,

Messing = 0,00002334
geschmiedetes Eisen = 0,00001526 } der Länge.
Platina = 0,00001070

II.

Nach dieser nothwendigen Vorerinnerung wird es nun leicht seyn, die Einrichtung des Pendelapparats zu verstehen. Wir wollen hier vorzugsweise den von Borda erfundenen beschreiben, indem dieser der erste war, welcher in die Pendel-

messungen den großen Grad von Genauigkeit brachte, den sie jetzt erreicht haben. Das Pendel selbst besteht, um den Widerstand der Luft desto unbedeutender zu machen, aus einer Kugel von Platina (Fig. 52) von etwa ¾ Zoll Halbmesser, welche an einem feinen metallenen Faden aufgehängt ist. Um die Kugel, ohne ihre Gestalt zu ändern, an den Faden zu befestigen, dient eine Kappe (calotte), welche aus einem kleinen Segment einer hohlen Kugel von Platina besteht, die genau denselben Durchmesser, wie die massive, hat. Oben auf derselben wird ein kleiner Cylinder, wodurch der Faden gezogen ist (wie Fig. 52 näher zeigt), aufgeschraubt. Ist alles genau gearbeitet, so reicht die bloße Berührung, wenn man noch dazu eine unmerklich dünne Schicht einer öhligen Flüssigkeit zwischen die Kugel und die Kappe bringt, hin, um die beiden Körper aneinander zu befestigen. Um das Pendel schwingen zu lassen, wird das obere Ende des Fadens mit einer stählernen Schneide, denjenigen ähnlich, worauf die Uhrpendel schwingen, in Verbindung gesetzt. (Fig. 53) ist die Einrichtung dieses Schwingungsapparats näher dargestellt. An dem Körper der Schneide ist sowohl oberhalb als unterhalb ein Cylinderförmiger Ansatz, dessen Achse auf der Schneide senkrecht steht, angebracht. An der untern wird vermittelst eines andern Cylinders, worin eine Schraube geschnitten, und wodurch der Faden durchgezogen ist, dieser letztere befestigt. Der obere Ansatz dient dem untern zum Gegengewicht. Die Unterlagen der Schneide beim Schwingen des Pendels bilden zwei genau geglättete Seitenflächen eines harten Steines, die vermittelst einer Wasserwage in dieselbe horizontale Ebene gebracht werden. Die Unterlagen selbst ruhn auf einer eisernen Platte, welche von starken eisernen Stangen, die in der Mauer unbeweglich *) fest sind, getragen wird. Gerade unterhalb der Kugel und in einiger Entfernung von derselben befindet sich ein stählerner Cylinder, dessen obere Grundfläche genau polirt und horizontal seyn muß. Dieser Cylinder (Fig. 55) läßt sich an einem auf dem Fuß-

---

*) Man darf den Pendelapparat durchaus nicht auf einem gedielten Fußboden, der unter sich einen hohlen Raum hat, aufstellen.

boden festgemachten Gestelle, von unten nach oben verschieben, und vermittelst einer Druckschraube in jeder Lage befestigen. Um die obere polirte Fläche desselben mit der allergrößten Genauigkeit bis zu einer bestimmten Höhe zu erheben, dient eine Mikrometerschraube. Setzt man das Pendel in Ruhe und erhebt diesen Cylinder so lange, bis seine obere Grundfläche die Kugel genau berührt, so ist ein Perpendikel von einem Punkt der Schneide, auf die Ebene dieser Grundfläche gefällt, der Länge des (physischen) Pendels genau gleich. Um diese Länge zu messen dient ein genau berichtigter metallener Maßstab T L mit Endflächen (étalon à bouts) (Fig. 57). In diesem Maßstab ist auf der obern Fläche, seiner Länge nach, eine Falze eingeschnitten, in welcher sich, vermittelst einer feinen Schraube, ein anderer Maßstab L A, verschieben läßt, so daß er über die Endfläche von T L bei L hervorragt. Um diesen Maßstab an die Stelle des Pendels zu bringen, dient ein metallenes Futteral (Fig. 56), worin der obere Theil des Maßstabes (T L) sich genau, ohne leeren Zwischenraum, einschieben läßt. Oberhalb ist mit diesem Futteral eine Schneide, wie man sie zum Aufhängen der Uhrpendel gebraucht, fest verbunden. Diese Schneide geht der Breite nach genau durch die Mitte des Futterals, und ist auf der geometrischen Achse desselben senkrecht. Beim Gebrauch schiebt man den Maßstab T L in dieses Futteral, bis die eine Endfläche desselben genau an der Schneide anliegt, wovon man sich, da das Futteral zum Theil durchbrochen ist, leicht überzeugen kann, wenn man nämlich das Werkzeug gegen das Licht betrachtet. Man befestigt nun das Futteral in dieser Lage, vermittelst einer Druckschraube, an den Maßstab, und hängt diesen statt des Pendels auf den Unterlagen des letztern auf. Man verschiebt alsdann das in der Falze bewegliche Stück L A so lange, bis der Endpunkt A desselben die polirte Stahlfläche (Fig. 55.) ebenfalls genau berührt. Alsdann ist T A die Länge des Pendels. Dieselbe ist also gleich der Länge des Maßstabes T L + der Länge von L A. Um diese letztere zu messen, ist sowohl auf dem Maßstab, längs dem in der Falze beweglichen Stück, als auch auf diesem letztern selbst eine Eintheilung angebracht, welche zu-

sammen einen Vernier bilden. Treffen, wenn das bewegliche Stück die Stahlfläche berührt, zwei Theilstriche beider Maße genau zusammen, so hat man die Länge von T L genau. Ist dieses nicht der Fall, so bringt man T L auf den Maßvergleicher, und verfährt so, wie (I.) in Beziehung auf den Maßstab A gesagt worden. Man bringt T A auf den Maßvergleicher, und läßt alsdann das bewegliche Stück so weit vorwärts oder rückwärts gehn, bis ein Theilstrich des Verniers mit einem des Maßes genau zusammentrifft. Die Bewegung des Fühlhebels zeigt alsdann die kleine Weite, um welche A L verrückt worden, genau an.

III.

Wir wollen nun, nachdem wir den Apparat im Ganzen beschrieben, über einzelne Theile desselben noch einige Bemerkungen hinzufügen, und dann die Art, ihn zu gebrauchen, und die Länge des einfachen Sekundenpendels daraus herzuleiten näher zeigen.

a) Da es schwer seyn würde, den Einfluß, den der Körper der Schneide (Fig. 53) auf die Schwingungen des Pendels hat, mit Genauigkeit zu bestimmen, so muß man dieses Stück so einrichten, daß sein Schwerpunkt sehr nahe in die Schneide selbst fällt, und daß es dabei für sich allein sehr nahe in derselben Zeit, wie auch in Verbindung mit dem Pendel, schwingt. Wäre dieses letzte völlig genau erreicht, so würde der Körper der Schneide auf die Schwingungen des Pendels gar keinen Einfluß haben. Allein wenn es auch nur sehr nahe erreicht ist, so hat der Körper der Schneide, da sein Schwerpunkt nur wenig von der Umdrehungsachse entfernt ist, auf das Pendel einen nur äußerst geringen Einfluß. Borda überzeugte sich bei dem von ihm gebrauchten Apparat hiervon dadurch, daß er dasselbe Pendel an zwei verschiedenen Schneiden, die an Gewicht merklich verschieden waren, aufhieng, wobei die Resultate ganz unverändert blieben.

b) Bei der Rechnung, wodurch das Pendel auf ein einfaches reducirt wird, muß der metallene Faden, woran das Pendel hängt, als ein Cylinder, der aus einer durchaus ho-

mogenen Materie besteht, betrachtet werden. Man überzeugt sich davon, wenn man ihn nach dem Versuch genau in der Mitte durchschneidet, und zusieht, ob das Gewicht beider Stücke eben groß ist. — Wegen der magnetischen Kraft muß man den Gebrauch eines Fadens von Stahl oder Eisen vermeiden.

c) Bei der Rechnung wird der Schwerpunkt der Kugel, als genau in ihrem Mittelpunkt befindlich, vorausgesetzt. Da nun dieses in der Ausübung vielleicht nicht genau der Fall seyn könnte, so muß man die Kugel an verschiedenen Punkten ihrer Oberfläche aufhängen, und aus den Resultaten aller dieser Versuche das Mittel nehmen. — Da überhaupt die Kugel und ihre Kappe unter allen Theilen des Pendels nicht nur das größte Gewicht haben, sondern auch von der Umdrehungsachse am weitesten entfernt sind, so wird der Schwingungspunkt des Pendels sehr nahe in den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Kugel und ihrer Kappe fallen. Wenigstens wird ein kleiner Fehler, den man bei Bestimmung dieses Schwerpunkts begeht, demjenigen, den man bei der Bestimmung des Schwingungspunkts oder der Länge des einfachen Pendels begeht, fast ganz genau gleich seyn. *) Bei dem Schwerpunkt der Kugel kann, besonders wenn man sie an mehreren Punkten aufhängt, kein Fehler vorfallen. Wegen der etwas zusammengesetzten Gestalt der Kappe aber kann bei Bestimmung ihres Schwerpunkts, wenn man ihn aus der geometrischen Gestalt herleitet, leicht eine kleine Unrichtigkeit vorfallen. Es ist daher gut, das Gewicht dieser Kappe gegen das der Kugel so klein als möglich zu machen. Um den Einfluß, den ein hier begangener Fehler auf die Bestimmung der Pendellänge haben könnte, in einem bestimmten Beispiele zu übersehn, nehme man an, der Halbmesser der Kugel sey $= \frac{3}{4}$ Zoll $=$ 9 Linien, der Schwerpunkt der Kappe liege Eine Linie über dem höchsten Punkt der Kugel, und das Gewicht der Kugel sey 99mal so

---

*) D. h. nicht allein der Unterschied dieser beiden Fehler wird gegen die ganze Länge des Pendels klein seyn, sondern der Eine Fehler sich zum andern sehr nahe, wie 1 : 1, verhalten.

groß, als das der Kappe. Alsdann liegt der gemeinschaftliche Schwerpunkt 0, 1 Linie über dem Mittelpunkt der Kugel. Hätte man bei der Bestimmung des Schwerpunkts der Kappe die Höhe desselben über der Kugel = 2 Linien, oder doppelt so groß, als die wirkliche, angenommen, so würde die Rechnung die Höhe des gemeinschaftlichen Schwerpunkts über dem Mittelpunkt der Kugel = 0,011 Linien, also nur um 0,01 Linie fehlerhaft gegeben haben. — Auf die Bestimmung des Halbmessers der Kugel aber muß man die größte Sorgfalt verwenden, denn ein hierbei begangener Fehler würde einen fast eben so großen in die Bestimmung der Pendellänge bringen. Man kann diesen Halbmesser entweder durch unmittelbare Messung, oder auch aus dem absoluten und specifischen Gewicht der Kugel durch Rechnung finden.

d) Es ist zwar vortheilhaft, die absolute Länge des Pendels, dessen man sich zu den Beobachtungen bedient, so groß, als es füglich geschehn kann, zu nehmen. Borda bediente sich eines Pendels von mehr als 12 Pariser Fuß Länge. Da er so von einem größern Maß auf ein kleineres, auf das Sekundenpendel, (welches für die Decimalsekunde etwa 0,74 Meter, und für die Sexagesimalsekunde 3 Fuß 8 Linien lang ist) schloß, so verminderte sich ein bei der Messung des ersten begangener Fehler in Beziehung auf das zweite. Allein bei einer so großen Länge des Pendels wird theils der Apparat, besonders zu Beobachtungen auf Reisen, minder bequem, theils ist es wegen anderer Ursachen, die sogleich näher erklärt werden, nützlich, das Pendel nicht ganz genau, aber doch nahe so lang zu machen, als das der Uhr, womit man die Dauer seiner Schwingungen bestimmt. Nur wird man dafür sorgen müssen, daß das Pendel derselben nicht zu kurz sey. Am besten eignet sich dazu eine Uhr, welche genau Sekunden schlägt.

IV.

Bei der Anwendung des beschriebenen Apparats muß man damit anfangen, die Zahl der Schwingungen genau zu bestimmen, die das zum Versuch angewendete Pendel in einer bestimmten Zeit macht. Hierzu ist vor Allem eine richtige Uhr

nöthig, deren Gang man also zuerst auf das sorgfältigste reguliren muß. Die Zahl der Schwingungen, die das zum Versuch angewendete Pendel macht, einzeln zu zählen, würde nicht allein eine sehr lästige, sondern auch eine sehr unzuverlässige Arbeit seyn. Durch folgendes Verfahren, welches man ebenfalls Borda verdankt, kann man dieselbe vermeiden. Wir wollen bei Erklärung desselben das zum Versuch angewendete Pendel durch A und das Uhrpendel durch B bezeichnen. Man nehme an, beide Pendel schwingen nahe gleich schnell, doch sey der Gang von A der stärkere. Man stelle sich nun beide Pendel in Bewegung, und zwar in dem Augenblick vor, wo sie beide zusammen nach derselben Richtung durch die Vertikallinie durchgehn. Gingen beide Pendel genau eben schnell, so würden sie durchaus immer zusammenbleiben, also auch bei jedem Schwung im nämlichen Augenblick und nach derselben Richtung durch die Vertikallinie durchgehn. Allein weil das zum Versuch angewendete Pendel (A) etwas vor dem der Uhr voreilt, so wird nach einiger Zwischenzeit, wenn dieses durch die Vertikallinie geht, jenes schon seine Schwingung vollendet haben. Alsdann hat es eine halbe Schwingung mehr gemacht, als das Uhrpendel. Nach einer nochmaligen eben so langen Zwischenzeit hat A noch eine halbe Schwingung, also eine ganze Schwingung über das Pendel der Uhr gewonnen. Alsdann gehn sie wieder beide zusammen durch die Vertikallinie, aber sie bewegen sich nach entgegengesetzten Richtungen. Die Pendel entfernen sich nun nach entgegengesetzten Seiten, aber nachdem das erste über das zweite nochmals Eine Schwingung gewonnen, gehn sie wieder beide zusammen durch die Vertikallinie, und zwar bewegen sie sich nun wieder nach derselben Richtung. Man nennt dieses gleichzeitige Durchgehn beider Pendel durch die Vertikallinie, wenn sie sich dabei nach derselben Richtung bewegen, ein Zusammentreffen, eine Coincidenz (coincidence) derselben. So oft eine solche Statt findet, hat A zwei Schwingungen mehr gemacht, als B. Wenn also in der Zeit von N Schwingungen des Pendels B (welche Zahl der Zeiger der Uhr angibt) m dieser Coincidenzen (die erste abgerechnet), eingetroffen sind, so hat man, die

Zahl der Schwingungen von A in derselben Zeit = N′ gesetzt,

$$1)\ N' = N + 2m.$$

Die Genauigkeit dieses Resultats ist um so größer, je größer sowohl N als m ist, d. h. je mehr Schwingungen B während des Versuchs gemacht hat, oder je länger der Versuch gedauert hat, und je mehr Coincidenzen während desselben Statt gefunden haben. Nämlich in dem Ausdruck von N′ ($= N + 2m$) kann nur der Werth von m um einige Einheiten unsicher seyn, indem nur über den Augenblick der ersten und letzten Coincidenzen ein Zweifel Statt finden kann, und die Zahl der dazwischen fallenden ganz genau ist. Allein der bei m begangene *) Fehler ist, bei gleicher Größe, verhältnißmäßig um so unbeträchtlicher, je größer $N + 2m$, oder sowohl N als m. Bei den gefundenen zusammengehörigen Zahlen N, N′ muß, um sie zu unserm Zwecke brauchbar zu machen, noch in dop-

---

*) Es ist daher nicht ganz richtig, wenn Biot (traité d'astron. phys. tom. III. addit. p. 156) behauptet, der Werth von N′ werde um so genauer gefunden, je größer die Zahl der Schwingungen der Uhr ist, die zwischen zwei zunächst aufeinanderfolgenden Coincidenzen fallen, oder jemehr der Gang der Pendel A, B sich der Gleichheit nähert. Dieses ist nur der Fall, wenn man die Beobachtung auf Eine Coincidenz (die erste natürlich nicht mitgerechnet) beschränkt. Ist nämlich $m = 1$, so ist das Resultat um so genauer, je größer N, welches in diesem Falle die Zahl der Schwingungen der Uhr zwischen zwei unmittelbar folgenden Coincidenzen ist. Allein für eine gleiche Dauer des Versuchs, also für ein gleiches N, findet sich der Werth von N′ um so genauer, je größer m oder die Menge der eingetroffenen Coincidenzen ist. Die Vergrößerung von m, welche mit der Ungleichheit des Ganges beider Pendel zunimmt, ist noch aus einem andern Grunde anzurathen. Wenn nämlich beide Pendel fast eben schnell schwingen, so ist es schwer, den Augenblick einer Coincidenz genau zu bestimmen. Die Pendel trennen sich alsdann selbst nach mehrern Schwingungen so unmerklich voneinander, daß man nicht bestimmt angeben kann, ob die Coincidenz schon statt gefunden hat, oder nicht. Allein man darf auch die Zahl der Coincidenzen in einer bestimmten Zeit nicht allzusehr vermehren. Es wird nämlich dadurch endlich fast eben so lästig und unzuverlässig die Coincidenzen als die einzelnen Schwingungen zu zählen.

pelter Hinsicht eine Verbesserung angebracht werden. Man muß nämlich suchen, wie viele Schwingungen der Uhr zu N′ Schwingungen des Pendels A gehörten, wenn seine Schwingungen a) im luftleeren Raum geschähen, und b) der Elongationswinkel bei denselben unendlich klein wäre. Setzt man die zu N′ solcher Schwingungen von A gehörige Zahl der Schwingungen von B = n″, die Dauer Einer Schwingung von B (des Uhrpendels) in Sekunden ausgedrückt) = e, die Dauer Einer Schwingung von A unter den eben angeführten Umständen *) = t″, so hat man

$$2)\ t'' = \frac{n'' e}{N'}.$$

a) Nach (§. 84. 3.) wird die Dauer einer Schwingung durch die Luft nur insofern verändert, als das Pendel in der Luft von seinem Gewicht verliert. — Verhält sich die Dichtigkeit der Luft zu dem der Materie, woraus das Pendel besteht, wie 1 : h, so braucht man in den Ausdrücken, welche die Schwingungszeit eines Pendels im luftleeren Raum darstellen, nur für g **) den Werth $\frac{h-1}{h} \cdot g$ zu setzen, um die Dauer einer Schwingung in der Luft zu erhalten. Nun hat man aber (§. 71. 6.) für die Zeit T einer Schwingung im luftleeren Raum

$$3)\ T = \pi \sqrt{\left(\frac{P \cdot r^2}{P \cdot d \cdot g}\right)}.$$

Also für die Zeit T′ einer Schwingung in der Luft

$$T' = \pi \sqrt{\left(\frac{P\, r^2\, h}{P \cdot d \cdot g\,(h-1)}\right)} = T \sqrt{\left(\frac{h}{h-1}\right)}.$$ Dieser Werth gilt für einen unendlich kleinen Elongationswinkel, und muß für einen bestimmten Werth dieses letztern mit der Reihe (§. 67. 14.) multiplicirt werden, deren Werth nur von jenem Winkel und gar nicht von g abhängt. Setzt man denselben

*) Nämlich im luftleeren Raum, und bei einem unendlich kleinen Elongationswinkel.

**) D. h. für die Geschwindigkeit, welche die Schwere einem im leeren Raum fallenden Körper in Einer Sekunde ertheilt.

= f, die Zeit einer Schwingung, bei dem angenommenen Elongationswinkel, im luftleeren Raum = t, in der Luft = t′, so ist

$$4)\ t = \pi f . \sqrt{\left(\frac{P r^2}{P d . g}\right)};\ t' = \pi f \sqrt{\left(\frac{P r^2 h}{P . d . g\ (h-1)}\right)} =$$

$$= t \sqrt{\left(\frac{h}{h-1}\right)};$$

also $5)\ t : t' = T : T' = \sqrt{(h-1)} : \sqrt{h}$.

Nun nehme man zwei einander ganz gleiche (physische) Pendel A, C. (A) mache eine gewisse Zahl N′ von Schwingungen in der Luft, C mache eben so viele im luftleeren Raum *). Die Elongationswinkel können bei den verschiedenen Schwingungen desselben Pendels gleich, oder wie man will, verschieden seyn. Allein bei zwei zusammengehörigen Schwingungen beider Pendel seyen sie gleich. Alsdann wird sich die Dauer aller Schwingungen von A zu der von C = $\sqrt{h} : \sqrt{(h-1)}$ verhalten. Da nämlich die Dauer jeder Schwingung von A zu der zugehörigen von C sich wie $\sqrt{h} : \sqrt{(h-1)}$ verhält, so muß dieses von allen Schwingungen zusammen ebenfalls gelten. — Kommen daher auf N Schläge einer Uhr N′ = = (N + 2 m (1)) Schwingungen von A, so ist (da die Zahl der Schläge der Uhr der Zeit proportional ist), wenn man die Zahl der Schläge der Uhr für N′ Schwingungen von C = n setzt,

$$6)\ n = N . \sqrt{\left(\frac{h-1}{h}\right)}.$$

Der Werth des Verhältnisses 1 : h muß so genommen werden, wie er während des Versuchs ist. Derselbe verändert sich nämlich sowohl mit dem Thermometer- als Barometerstand. Dieses Verhältniß sey, bei einem Barometerstand b und bei 0^0 Wärme, = 1 : a. Um nun den Werth desselben bei d^0 Temperatur und bei dem Barometerstand b′ zu finden, so stellen μ, φ die Ausdehnung dar, welche die Luft und die Materie des Pendels, ihr Volumen bei 0^0 Wärme = 1

*) Versteht sich nicht in derselben Zeit.

gesetzt, durch Einen Grad Wärme dem Volumen *) nach erleiden. Man hat also, wenn das

Barometer,	Thermomet.	Volum.d.Luft	Vol.d.Pendels.
b —	d	$1 + \mu d$ —	$1 + \varphi d$
b′ —	d	$\frac{(1 + \mu d) b'}{b}$ —	$1 + \varphi d$

Nun sey ferner, wenn

Baromet.	Thermomet.	Dichtig.d.Luft.	Dichtig.d.Pend.
b —	d	s —	a′
b′ —	d	s′ —	a′.

Alsdann hat man

7) $1 : s = 1 + \mu d : 1$,

8) $s : s' = b : b'$;

also 9) $1 : s' = (1 + \mu d) b : b'$;

10) $s' = \frac{b'}{(1 + \mu d) b}$.

11) $a : a' = 1 + \varphi d : 1$,

12) $a' = \frac{a}{1 + \varphi d}$;

also aus 9) 11)

13) $s' : a' = \frac{b'}{(1 + \mu d) b} : \frac{a}{1 + \varphi d}$.

Das zuletzt gefundene ist also das Verhältniß der Dichtigkeiten der Luft und des Pendels bei dem gegebenen Thermometer- und Barometerstand. Soll dasselbe, wie wir oben angenommen, durch $1 : h$ vorgestellt werden, so hat man

*) In den Tafeln über die Ausdehnung der Körper durch die Wärme bezieht sich die angegebene Größe bei Flüssigkeiten immer auf das Volumen, bei festen Körpern aber nur auf die Länge. Ist (die Länge bei 0^0 Wärme, = 1 gesetzt), die Größe der Ausdehnung $= \varphi$ für Einen Grad Wärme, so verhalten sich die Volumina bei 0^0 und 1^0 wie $1^3 : (1 + \varphi)^3 = 1 + 3\varphi + 3\varphi^2 + \varphi^3$. Da φ sehr klein, so kann man die höhern Potenzen von φ gegen φ vernachlässigen, also $1 + 3\varphi + 3\varphi^2 + \varphi^3 = 1 + 3\varphi$ setzen. Hier ist 3φ die Ausdehnung nach dem Volumen, welche also dreimal so groß ist, als die nach der Länge.

$$14)\quad \frac{b'}{(1+\mu d)\,b} : \frac{a}{1+\varphi d} = 1 : h;$$

also $$15)\quad h = \frac{(1+\mu d)\,ab}{(1+\varphi d)\,b'}.$$

Wenn die Pendelversuche eine etwas längere Zeit dauern, so könnten sich b, und vorzüglich d, wohl etwas ändern. Sollten diese Aenderungen sehr groß und plötzlich seyn, so thut man besser, die Versuche auf eine andere Zeit zu verlegen. Sonst aber beobachtet man b und d im Anfang und am Ende des Versuchs, oder auch wohl in den Zwischenzeiten, und nimmt aus allen gefundenen Größen das Mittel.

b) Man setze die Dauer einer Schwingung des Pendels im luftleeren Raum, und für einen unendlich kleinen Elongationswinkel $= t''$. Bedeutet nun f den Werth der Reihe (No. 14. §. 67.) für einen bestimmten Elongationswinkel, so ist für denselben die Dauer einer Schwingung $= f\,.\,t''$. Bliebe nun für alle Schwingungen der Elongationswinkel, also auch f sich gleich, so wäre die Dauer von N′ Schwingungen $= f\,N'\,t''$. Stellen nun aber $f, f', f'' \ldots$ die Werthe vor, welche f für die Elongationswinkel, so wie sie wirklich nacheinander folgen, annimmt; so ist die Dauer von N′ Schwingungen im luftleeren Raum, und bei denselben Elongationswinkeln, wie sie bei dem Versuch in der Luft wirklich Statt finden $= f t'' + f' t'' + f'' t'' + f''' t''' + \ldots$, welche Reihe bis zum N′ten Glied fortgesetzt werden muß. Nun gehören aber zu N′ solcher Schwingungen im luftleeren Raum nach (a. 6) $n = N \sqrt{\left(\frac{h-1}{h}\right)}$ Schwingungen der Uhr. Ist also die Dauer einer Schwingung der Uhr $= e$, so hat man

$$16)\quad f t'' + f' t'' + f'' t'' + \ldots = e . N \sqrt{\left(\frac{h-1}{h}\right)},$$

also $$17)\quad t'' = \frac{e\,N \sqrt{(h-i)}}{(f+f'+f''+\ldots)\sqrt{h}}.$$

Wenn die Elongationswinkel, also auch die Werthe f, f′ u. s. f. alle nur wenig von einander verschieden sind, so kann man

jeden dem Mittel aus dem ersten und letzten gleich setzen. Ist dieses Mittel $= K$, so ist $f + f' + f'' + \ldots = N' K$, woraus sich dann t'' (nach 2) ergibt. Bei der Anwendung pflegt man nun überhaupt den Elongationswinkel nur klein, so daß f, f' u. s. f. alle nur wenig von 1 verschieden sind, zu nehmen, wodurch denn der Unterschied derselben untereinander noch viel kleiner wird. Wegen der großen Genauigkeit indessen, die bei diesen Versuchen erfordert wird, kann man auf folgende Art verfahren. Man messe während des Versuchs in gleichen Zwischenzeiten den Elongationswinkel *), bestimme demgemäß f, und nehme an, während jeder Zwischenzeit sey der Werth desselben dem Mittel aus den am Anfang und Ende der Zwischenzeit gefundenen Werthen gleich. Hat man für s solcher Zwischenzeiten den Werth von f bestimmt, so kommen auf jede Zwischenzeit $\frac{N'}{s}$ Schwingungen des Pendels. Drückt man die mittlern Werthe von f in diesen nacheinander folgenden Zwischenzeiten durch F, F', F'' u. s. f. aus, so hat man sehr nahe

$$18)\ f + f' + f'' = N' \left(\frac{F + F' + F'' + \ldots}{s} \right).$$

Hier ist $\frac{F + F' + F''}{s}$ das Mittel aus allen für F gefundenen Werthen. Setzt man also dieses Mittel $= C$, so ist

$$19)\ t'' = \frac{e N \sqrt{(h - 1)}}{N' . C . \sqrt{(h)}}.$$

Es gibt noch ein anderes Verfahren, den Werth der Reihe $f + f' + f''$ zu finden. Dasselbe gründet sich auf den durch die Theorie und Erfahrung bestätigten Satz, daß die Größe des Elongationswinkels in geometrischer Progression abnimmt, wenn die Zeit in arithmetischer wächst. Ist nun die Größe

---

*) Dieses geschieht am besten dadurch, daß man in der Schwingungsebene des Pendels und fast in derselben Höhe mit dem Mittelpunkt der Kugel einen horizontalen Maßstab anbringt, und an demselben mißt, wie weit das Pendel sich bei jeder Schwingung von der Vertikallinie entfernt.

des Elongationswinkels im Anfang des Versuchs = α, am Ende desselben = β, so findet man durch eine Rechnung, die hier nicht näher ausgeführt werden kann,

$$20)\ f + f' + f'' = 1 + \frac{\sin.\ \alpha\ .\ \sin.\ (\alpha - \beta)}{16\ .\ M\ .\ \log.\ \left(\frac{\alpha}{b}\right)}.$$

Hier bedeutet M den Modulus des gewöhnlichen logarithmischen Systems, (Buchstabenrechenk. Th. II. §. 221), so daß $\frac{1}{M} = 2{,}30258509$. α und β (in $\log.\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$) bedeuten die Bogen α, β in Theilen des Halbmessers ausgedrückt. Setzt man nun

$$21)\ 1 + \frac{\sin.\ \alpha\ .\ \sin.\ (\alpha - \beta)}{16 . M\ .\ \log.\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = C',$$ so ergibt

sich $$22)\ t'' = \frac{e\,N \sqrt{(h - 1)}}{N'\,C' \sqrt{(h)}}.$$

V.

Aus (IV. 22 oder 19) ist die Dauer (t'') einer Schwingung, die das zum Versuch angewendete Pendel im luftleeren Raum, und bei einem unendlich kleinen Elongationswinkel machen würde, bestimmt. Es kommt also noch darauf an a) die Länge desselben zu messen, und b) die Länge des einfachen, das mit ihm eben schnell schwingt, daraus herzuleiten.

a) Zum Messen der Pendellänge dient der Maßstab TL (Fig. 57), dessen Gebrauch schon oben (II. am Ende) näher erklärt worden. Nur muß man Folgendes bemerken. Die Schwingungen des Pendels hangen von der Länge ab, welche das Pendel während des Versuchs hat. Man mißt indessen seine Länge am Ende desselben. Hat nun in der Zwischenzeit die Temperatur sich geändert, so ist dieses auch mit der Länge des Pendels der Fall. Man beobachtet daher das Thermometer sowohl am Anfang als am Ende des Versuchs, und nimmt das Mittel für die Temperatur an, worauf die ge-

fundene Zahl von Schwingungen sich bezieht. Die unmittelbar gemessene Länge (l) muß nun 1) auf diese mittlere Temperatur, und 2) auf das Maß gebracht werden, welches man fände, wenn der Maßstab TL (Fig. 57), womit man sie mißt, die Temperatur 0^0 hätte. Beide Verbesserungen erhält man durch die Formel (I. 6). Ist nämlich die mittlere Temperatur während des Versuchs = d', die am Ende desselben, wo auch die Messung geschieht, = d, so hat man für die reducirte Länge (l'') des Pendels

$$1)\ l'' = \frac{(1 + nd)(1 + md')}{1 + md} l;$$

wo n die Ausdehnung des Maßstabes und m die des Fadens, woran das Pendel aufgehängt ist, für 1^0 Wärme bedeutet. Man kann nämlich, da der Faden den bei weitem größten Theil der Länge ausmacht, annehmen, das Pendel dehne sich so aus, als ob es ganz mit dem Faden aus derselben Materie bestände. Will man noch genauer rechnen, so muß man die Länge l in zwei Theile, in die des Fadens, und die des Durchmessers der Kugel theilen, und bei jedem die Verbesserung besonders anbringen.

b) Die Länge (l''') des einfachen Pendels, welches mit dem zum Versuche angewendeten gleich schnell schwingt, findet man nach (§. 71. 4), wenn man das Moment der Trägheit des Pendels durch das statische Moment desselben gegen die Umdrehungsachse dividirt. Ist der Halbmesser der Kugel = a, so ist ihr Mittelpunkt um (l'' — a) von der Umdrehungsachse entfernt. Setzt man daher ihr Gewicht = M, so ist ihr Moment der Trägheit gegen die Umdrehungsachse (§. 73. 11 und §. 81. 16) = $(\frac{2}{5} a^2 + (l'' - a)^2)$. $M = (\frac{7}{5} a^2 - 2 a l'' + l''^2) M.$ — Der Faden kann als ein unendlich dünner Cylinder angesehn werden. Erstreckte sich derselbe von der Umdrehungsachse an bis zu seinem untersten Ende, und wäre alsdann sein Gewicht = P', seine Länge = q', so wäre sein Moment der Trägheit = $\frac{P' . q'^2}{3}$.

Allein gewöhnlich fängt der Faden erst am Ende des Auf-

hängungsapparats (Fig. 53) an. Man muß also das Moment der Trägheit des fehlenden Stücks abziehen. Nun sey die wirkliche Länge des Fadens = q, die Entfernung seines Anfangspunktes von der Umdrehungsachse = c, (also q′ = = q + c), ferner sein wirkliches Gewicht = P, das Gewicht des fehlenden Stücks = P″, so hätte man, das wirkliche Moment der Trägheit des Fadens = γ gesetzt,

$$2)\ V = \frac{P'q'^2}{3} - \frac{P''c^2}{3},$$

$$3)\ P' : P = q + c : q,$$

$$4)\ P'' : P = c : q;$$

also $$5)\ P' = \frac{(q+c)P}{q};\ P'' = \frac{c.P}{q};$$

also $$6)\ V = \frac{((q+c)^3 - c^3)}{3q} P = \frac{(q^2 + 3c^2 + 3cq)P.}{3}$$

Ueberdem ist das statische Moment der Kugel = (a + l″) M, das des Fadens (da die Mitte seiner Länge um $(c + \frac{1}{2} q)$ von der Umdrehungsachse entfernt ist) = $(c + \frac{1}{2} q) P$. Zu der Summe der Momente der Trägheit, der Kugel und des Fadens muß noch das der Kappe, und eben so zu der Summe ihrer statischen Momente ebenfalls das der Kappe hinzugefügt werden, um die gesuchte Länge des einfachen Pendels zu finden. (Auf den Aufhängungsapparat (Fig. 53.) braucht man nämlich gar keine Rücksicht zu nehmen, indem er eben schnell schwingt, wie das Pendel (III. a). Hat die Kappe eine ganz bestimmte geometrische Gestalt, so kann man die Lage ihres Schwer- und Schwingungspunktes nach den früher erklärten Regeln finden. Ist dieses nicht, so kann man die Lage dieser beiden Punkte auf die Art, wie oben bei dem Pendel des Robins (§. 110.) erklärt worden, durch Versuche bestimmen. Setzt man das Gewicht der Kappe = R, die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Achse = r, die ihres Schwingungspunktes = s, so ist ihr Moment der Trägheit = R.r.s, ihr statisches Moment = R r. Hieraus erhält man also endlich, wenn man die Länge des einfachen Pendels,

das mit dem beim Versuch gebrauchten eben schnell schwingt, $= \lambda$ setzt,

$$7)\ \lambda = \left(\frac{\frac{7}{5}a^2 - 2a\,l'' + l''^2)M + \frac{(q^2+3c^2+3cq)}{3}P + R.r.s}{(l''-a)M + (c+\frac{1}{2}q)P + Rr}\right),$$

wo man den Werth von l'' aus 1) entnehmen muß. *)

VI.

Die (IV. 19 und 22) bestimmte Schwingungszeit (t'') des angewendeten Pendels wird nur selten gerade Eine Sekunde betragen. Da aber die Schwingungszeiten von zwei einfachen Pendeln sich wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten, so hat man, wenn die Länge des Sekundenpendels $= \lambda'$ gesetzt wird,

$$1)\ 1 : t'' = \sqrt{\lambda'} : \sqrt{\lambda},$$

$$2)\ 1 : t''^2 = \lambda' : \lambda,$$

$$3)\ \lambda' = \frac{\lambda}{t''^2}.$$

Dieses (λ') ist also die Länge des einfachen Sekundenpendels am Ort der Beobachtung. Man muß dieselbe nun noch auf den Werth bringen, den sie an der Oberfläche des Meeres haben würde. Zu dem Ende bemerke man, daß nach (§. 67, IV. 13), wenn man das dortige $t' = 1$ setzt,

$$4)\ \lambda' = \pi g;$$

also $5)\ g = \dfrac{\lambda}{\pi}.$

Hier bedeutet g den Werth, den es am Ort der Beobachtung (im luftleeren Raum) hat. Stellen wir denselben an der

---

*) Der Werth von λ gilt sowohl für den luftleeren als lufterfüllten Raum, d. h. ein einfaches Pendel von der Länge λ schwingt im luftleeren Raum eben schnell, als das zum Versuch angewendete ebenfalls im luftleeren Raum, und das erste schwingt in der Luft eben schnell, als das zweite ebenfalls in der Luft; wenn nämlich für beide Pendel die Beschleunigung im luftleeren Raum durch g und in der Luft durch $\frac{h-1}{h}g$ ausgedrückt wird.

Oberfläche des Meeres durch g′ und die Länge des Sekundenpendels daselbst durch Σ dar, so ist

6) $\Sigma = \pi g'$.

Nun steht aber, wie aus der Theorie der Attraction bekannt ist, die Schwere (also auch der Werth von g) an verschiedenen Orten der Erde im umgekehrten Verhältniß des Quadrats ihrer Entfernung vom Mittelpunkt der Erde. Ist also an dem Orte der Beobachtung der Halbmesser der Erde von der Oberfläche des Meeres an gemessen, $= A$, die Höhe des Ortes der Beobachtung über der Meeresfläche $= h$, so hat man

7) $g : g' = A^2 : (A + h)^2 = 1 : \frac{(A+h)^2}{A^2} =$

$= 1 : 1 + \frac{2h}{A} + \frac{h^2}{A^2}$.

Hier ist $\frac{h}{A}$ ein sehr kleiner Bruch, so daß man $\left(\frac{h}{A}\right)^2$ gegen $\frac{h}{A}$ vernachlässigen kann. Hierdurch verwandelt sich 7) in

8) $g : g' = 1 : 1 + \frac{2h}{A}$;

also 9) $g' = \left(1 + \frac{2h}{A}\right) g$. Folglich aus 6)

10) $\Sigma = \pi \left(1 + \frac{2h}{A}\right) g$, und endlich aus 5)

11) $\Sigma = \left(1 + \frac{2h}{A}\right) \lambda'$, wo der Werth von λ' aus 3) und (V. 7) zu entnehmen ist. — Den Werth von h muß man aus der Barometerhöhe nach Regeln, die in der Aerostatik näher erklärt werden, berechnen. Den Werth von A an dem Orte der Beobachtung findet man aus der geographischen Breite desselben. Ist diese $= \beta$, so hat man, wenn der Durchmesser des Aequators $= B$, der durch die Pole $= C$; $\frac{C}{B} = \varepsilon$ gesetzt, und die Erde als ein elliptisches Sphäroid angenommen wird,

$$12)\ A = B \sqrt{\left(\frac{\cos.\beta^2 - \varepsilon^4 \sin.\beta^2}{\cos.\beta^2 - \varepsilon^2 \sin.\beta^2}\right)}.$$

Den Werth von B kann man nach den genauesten Messungen und Rechnungen = 3271812 Toisen, und $\varepsilon = \frac{311}{312}$ *) annehmen.

VII.

Wir wollen zum Schluß alle im Vorigen erklärten Operationen, die zur Bestimmung der Länge des Sekundenpendels erforderlich sind, hier in der Kürze, der Ordnung nach, zusammenstellen. Man kann dieselben füglich a) in Messungen, und b) in Rechnungen eintheilen.

a) Messungen.

1) Nachdem man sich von dem richtigen Gang der Uhr, die zu den Versuchen gebraucht wird, versichert, und die Dauer Eines Schlages (e) derselben in Sekunden gefunden hat, beobachte man nach (IV.), wieviele Coincidenzen ihrer Schläge mit denen des Pendels, womit der Versuch angestellt wird, während einer bestimmten Zahl (N) von Schlägen der Uhr vorfallen. — Man beobachte von Zeit zu Zeit die Größe des Elongationswinkels, besonders des ersten und letzten. **) Man bemerke den Stand des Thermometers und Barometers im Anfang und am Ende des Versuchs.

2) Man messe gleich am Ende des Versuchs die Länge l (V. a) des gebrauchten Pendels vermittelst des Maßstabs TL (Fig. 57) und des Maßvergleichers.

b) Rechnungen.

3) Aus der (nach 1) gefundenen Zahl von Coincidenzen berechne man nach (IV. 1) die Zahl N′ der Schwingungen,

---

*) Littrow Astronomie Th. I. S. 332.

**) Wenn nicht ein zweiter Beobachter zur Hand ist, so wird es nicht wohl möglich seyn, die Zahl der Coincidenzen und die Größe der Elongationswinkel zugleich zu beobachten. Man kann indessen diese Elongationswinkel bei einer Wiederholung des Versuchs besonders bestimmen. Hat der Zustand der Luft sich nicht geändert, so werden, wenn nur der erste Elongationswinkel in beiden Versuchen gleich ist, alle übrigen ebenfalls seyn.

welche das zum Versuch gebrauchte Pendel während N Schlägen der Uhr macht.

4) Man suche nach (IV. a) den Werth von h, welcher das specifische Gewicht des Pendels gegen das der Luft (dieses = 1 gesetzt) zur Zeit des Versuchs ausdrückt (IV. a. 15).

5) Aus den (nach 1) beobachteten Elongationswinkeln berechne man den Werth von $f + f' + f'' \ldots$ in (IV. 17) entweder nach (IV. 18 oder 21). Hierdurch erhält man die Werthe C, C′ in (IV. 19 und 22). Aus einer dieser beiden Formeln (IV. 19 und 22) suche man vermittelst der schon gefundenen Werthe von e, N, N′, h, C, C′ den Werth von t'', d. h. die Dauer Einer Schwingung des Pendels, womit man den Versuch macht, wenn es dieselbe im leeren Raum und bei einem unendlich kleinen Elongationswinkel vollendete.

6) Die (2) gefundene Länge l des Pendels berichtige man nach (V. a. 1) wegen der Temperatur, und suche so die wahre Länge l'' des gebrauchten Pendels.

7) Aus l'' und den bekannten Maßen der einzelnen Theile des Pendels suche man nach (V. 7) die Länge λ des einfachen Pendels, welches eben schnell schwingt, als das beim Versuch gebrauchte.

8) Aus dem so eben gefundenen λ, und der schon früher (5) gefundenen Zeit t'', in welcher λ im luftleeren Raum, und bei einem unendlich kleinen Elongationswinkel Eine Schwingung verrichtet, suche man ferner nach (VI. 3) die Länge λ' desjenigen einfachen Pendels, welches unter denselben Umständen gerade in Einer Sekunde eine Schwingung macht.

9) Man suche aus der Breite (β) des Beobachtungsortes, die als bekannt vorausgesetzt werden muß, nach (VI. 11)

die Größe (A) des Erdhalbmessers daselbst von der Oberfläche des Meeres an gerechnet. Aus A und der Höhe h des Ortes der Beobachtung, die ebenfalls als bekannt vorausgesetzt werden muß, bestimme man den Werth des Bruches $\frac{2h}{A}$. Vermittelst desselben und des schon früher (8) gefundenen λ' findet man dann endlich nach (VI. 10) die gesuchte Länge (Σ) des einfachen Sekundenpendels. — Mit welcher Genauigkeit sich bei Beobachtung aller dieser Vorsichtsmaßregeln die Länge des Sekundenpendels bestimmen läßt, ergibt sich am besten aus der Uebereinstimmung der verschiedenen Messungen. Die Länge des Sekundenpendels zu Paris ward von Borda, und später von Biot, Bouvard und Mathieu bestimmt. Der erstere bediente sich dazu eines sehr langen Pendels, woraus er auf die Länge des Sekundenpendels schloß. Die letztern Beobachter bedienten sich eines Pendels, welches sehr nahe Decimalsekunden schlug, und doch weicht die von ihnen gefundene Länge des Sekundenpendels (= 0,741883 Met.) nur um $\frac{2}{100}$ Millimeter von der, welche Borda fand, ab. Und selbst von diesem äußerst kleinen Unterschied hat man die Ursache gefunden. Man nimmt nämlich die Schneide, worauf das Pendel schwingt, als eine mathematische Linie an. Betrachtet man sie indessen unter dem Mikroscop, so zeigt sie die Gestalt eines Cylinders von etwa $\frac{1}{100}$ Millimeter Halbmesser. Laplace fand durch eine Rechnung, die hier nicht näher erklärt werden kann *), daß dieser Halbmesser von der Länge des Pendels, dessen man sich bedient, abgezogen werden muß. Der Fehler, der dadurch in die Bestimmung der Länge des Sekundenpendels kam, war bei den Versuchen Borda's, der von einem längern Pendel auf ein kürzeres schloß, geringer, als bei denen von Biot, Bouvard und Mathieu. Nimmt man hierauf Rücksicht, so wird der Unterschied beider Messungen kleiner als $\frac{5}{1000}$ Millimeter. — Sehr wichtige und gründliche Belehrungen über die Bestimmung der Länge des Sekundenpendels findet man noch in folgender

*) Gilbert's Annal. der Phys. B. 57. S. 225.

Schrift: Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels, von F. W. Bessel (Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte zu Königsberg). Berlin 1828. Der Verfasser findet die Länge des Pendels, welches gewöhnliche (Seragesimal=) Sekunden schlägt, zu Königsberg, auf die Oberfläche der Ostsee reducirt, = 440,8179 Pariser Linien

Bei J. E. Schaub in Düsseldorf

sind nachfolgende Werke erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Anfangsgründe der mathematischen Geographie

für die mittlern und obern Klassen der Gymnasien, so wie für Alle, welche ohne mathematische Vorkenntnisse sich einen deutlichen Begriff von dem Weltsysteme zu verschaffen wünschen; von J. P. Brewer, Professor der Mathematik und Physik in Düsseldorf. Mit 4 Steintafeln. 1828. 16 gr. oder 1 Fl. 12 kr.

Man findet in dieser Schrift einen der wichtigsten Gegenstände des Unterrichts, dessen Kenntniß keinem Menschen von Bildung fremd seyn darf, mit einer seltenen Deutlichkeit und Gründlichkeit behandelt.

Lehrbuch der Geometrie und ebenen Trigonometrie,

nebst einer Sammlung geometrischer Aufgaben und minder bekannter Lehrsätze in systematischer Ordnung, als Anhang. Für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Joh. Paul Brewer, Professor der Mathematik und Physik in Düsseldorf. Mit 22 Steintafeln. Preis 2 Thlr. 12 gr. oder 4 Fl. 30 kr.

In der Vorrede dieses schätzbaren Buches bemerkt der Verfasser mit Recht, daß der große Reichthum der geometrischen Wissenschaft, mit der Armuth der meisten Lehrbücher verglichen, allerdings ein vollständigeres Lehrbuch zum Bedürfniß mache, und ein solches, über die ersten Anfangsgründe hinausgehendes, hat derselbe hier geliefert, sowohl für die Geometrie, als ebene Trigonometrie. Die schwierigern und tiefern Lehren der Geometrie sind in einem Anhange enthalten, der für höhere Klassen und fähigere Schüler gehört, indem die Anfangsgründe auch in mittlern Klassen brauchbar sind.

Der große Nutzen der Mathematik zur Erwerbung eines richtigen und bestimmten Ausdrucks, wovon der Grund ohne Zweifel in der Deutlichkeit, Richtigkeit und Ordnung der Vorstellungen selbst liegt, ist vom Verfasser bemerkt worden, und deßwegen hat derselbe sich bemüht, (welches sehr zu loben ist, weil es die Ueberzeugung der Allgemeingültigkeit befördert) die Sätze so zu fassen, daß sie, auch ohne die auf die

Figur bezogenen Buchstaben, als bestimmte Wahrheiten in Worten verstanden und ausgesprochen werden können.

Von der Ausführung können wir durchaus, im Ganzen, wie im Einzelnen, Deutlichkeit, Richtigkeit, Ordnung, Schärfe im Beweisen, und andere Tugenden einer guten Methode rühmen. Wir wünschen, daß dieses durch seinen Inhalt und seine Methode gleich befriedigende Buch in Vieler Hände kommen, und ein gründliches Studium der Geometrie befördern möge, indem dasselbe dem im Titel angegebenen Zwecke vollkommen entspricht. An Figuren ist hinlänglicher, ja reicher Vorrath; Druck und Papier gut.

Lehrbuch der Buchstaben-Rechenkunst,
für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht.
Von J. P. Brewer.

1r. Theil. 1 Thlr. 4 Gr. oder 2 fl.
2r. Theil. 1 Thlr. 16 Gr. oder 3 Fl.

Vortrefflich glaubt Rec. dieses Lehrbuch mit Recht nennen zu dürfen, da es nach Inhalt und Form nicht nur dem im Titel ausgesprochenen Zwecke völlig entspricht, sondern auch vor sehr vielen ähnlichen Schriften wesentliche Vorzüge hat. Herr B. zeigt sich überall als gründlichen selbstdenkenden Mathematiker, und als erfahrnen, gewandten Lehrer, zwei Eigenschaften, welche sich nicht immer bei mathematischen Schriftstellern vereinigen. Er verbindet mathematische Strenge mit elementarischer Deutlichkeit, und bleibt eben so weit von dem seichten, breiten Geschwätz mancher neuern, als von der trockenen fragmentarischen Kürze mancher ältern Lehrbücher entfernt.

Der erste Theil enthält von den ersten Anfangsgründen an bis zu der Auflösung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades Alles, was in den meisten Lehrbüchern innerhalb dieser Grenzen abgehandelt zu werden pflegt, die Lehre von den Primzahlen, die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel, die Lehre von den Logarithmen u. s. f.

Der zweite Theil enthält vorzüglich die Combinations-Lehre mit Anwendungen derselben, die Lehre von den Functionen, die von den höhern Gleichungen, insbesondere die von Lagrange für die Auflösung derselben erfundene Methode u. s. f., so daß Jeder durch das Lesen dieser Schrift zu dem Studium der Integral- und Differential-Rechnung gehörig vorbereitet seyn wird. Wir können also dieselbe Allen, welche sich entweder in den Anfangsgründen der Buchstaben-Rechenkunst gründlich unterrichten, oder ihre schon erworbene Kenntnisse noch vermehren wollen, mit Zuversicht empfehlen.

Das Papier ist vorzüglich und der schwierige Druck sehr korrekt.

Lehrbuch der Mechanik.

Von J. P. Brewer,

Professor der Mathematik und Physik in Düsseldorf.

Erster Theil.

(Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte an festen Körpern.)

215 Seiten Text in groß 8. Mit 8 Steintafeln, worauf 93 Figuren.

Preis 1 Rthlr. 12 Gr. oder 2 fl. 42 kr.

Man findet in dieser Schrift, wie in allen früher erschienenen Werken desselben Verfassers, eine seltene Verbindung von Deutlichkeit und Gründlichkeit; sie ist daher nicht allein den Mathematikern, sondern auch allen Technikern, Architekten, Wasserbaumeistern, Artilleristen und Ingenieurs als eines der nützlichsten und zweckmäßigsten Lehrbücher zu empfehlen.

Ueber die Dalton'sche Theorie.

Von J. F. Benzenberg.

gr. 8. Mit 3 Steindrucktafeln. 1830. 1 Thlr. 4 gr. oder 2 fl.

Der Redner des M. T. Cicero.

Eine Zuschrift an M. Brutus. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit einigen Anmerkungen versehen von J. P. Brewer. 16 gr. oder 1 fl. 12 kr.

Zeitgemäß erachten wir die Uebersetzung dieses Meisterwerks des unsterblichen Redners, der selbst Muster seiner eigenen Theorie in der Praxis war. Immer wird noch die Anleitung zur wahren Beredsamkeit und die Uebung darin zu sehr auf unsern Schulen vernachlässigt. Eine Aufgabe für den Abschieds-Akt kann unmöglich Ersatz geben. Der ganze letzte Jahres-Cursus sollte der Lehre und Anwendung nach Cicero's Leitfaden um so mehr gewidmet werden, als nicht nur die geistliche, sondern in unsern Tagen auch die politische Beredsamkeit ein neuer Hebel geworden ist, die Gemüther der Menschen zum eigenen Heil und zur Unterstützung des allgemeinen Wohls zu lenken. Aber auch hievon abgesehen und mit Verzichtleistung auf die höhere Beredsamkeit, ist die Kunst des mündlichen Vortrags, sowohl vorbereitet als, und noch mehr, aus dem Stegreife, in so vielen Verhältnissen eine unentbehrliche, ja höchst wichtige Geschicklichkeit geworden, daß es nur Verwunderung erregen kann, wenn so viel wie gar nichts zu ihrer Erwerbung geschieht. Wir empfehlen daher diese Uebersetzung, die im Ganzen sehr gut gerathen ist, zum Studium.

Zu einer zarten und sinnigen Weihnachts- und Neujahrsgabe eignen sich vorzüglich die

Bilder der Liebe.

Ein Geschenk für schöne Seelen, von A. Gebauer. 2te vermehrte Aufl. Mit 1 Kupf. Gebunden. Preis 8 gr. oder 36 kr.

„Diese Bilder sind nichts Gemachtes, sondern freie Ausströmungen eines von Liebe bewegten Gemüths" — sagt der Verfasser, und der Rec. im Morgenblatt fügt hinzu: „Frömmigkeit und Liebe, diese von jener rein gewaschen, wie das Kleid des Schwanes, jene von dieser erwärmt, belebt und beflügelt, wie der Tagfalter vom Lenz: das ist der Charakter dieser Ausströmungen."

An alle Christen,

welche an das tausendjährige Reich Christi und die Zeitrechnung desselben glauben, oder nicht glauben.

Eine Abhandlung, veranlaßt durch die im Jahre 1824 erschienene Auslegung der Offenbarung Johannis, von Herrn Justizrath Rühle von Lilienstern zu Dillenburg.

Von Dr. J. W. Grimm,

Generalsuperintendenten und geheimen Consistorialrathe.

Nach dessen Tode herausgegeben von Dr. W. A. Diesterweg, ordentl. Professor der Mathematik auf der Königl. Preuß. Rheinuniversität. 1825. Geheftet. Preis 9 gr. oder 40 kr.

Es ist schon Manches über den Untergang der Welt geschrieben worden In obigem interessanten Werkchen spricht nun der Verf. unter andern auch über die Weltdauer, vom großen Sabbath, von der letzten Weltperiode oder kleinen Satans-Zeit u. s. w.

Evangelische Hauspostille

oder

christliche Betrachtungen und Gesänge für häusliche Andacht, zur Beförderung wahrer Frömmigkeit und Seelenruhe.

Von Dr. W Hülsemann,

Pfarrer und Schulinspector in Elsey.

2 Bände. Groß 8. Preis 2 Thlr. 8 gr. oder 4 fl.

Dieses im Geiste des wahren Christenthums geschriebene Erbauungsbuch, wird die Herzen aller Christen innig ansprechen und ihnen bald lieb und theuer werden. Es eignet sich besonders für Freunde der Hausandacht, und für diejenigen, welche bei abgelegenen Wohnungen, bei kränklichem Körper, bei vorgerücktem Alter u. s. w. am Besuch des öffentlichen Gottesdienstes verhindert sind.

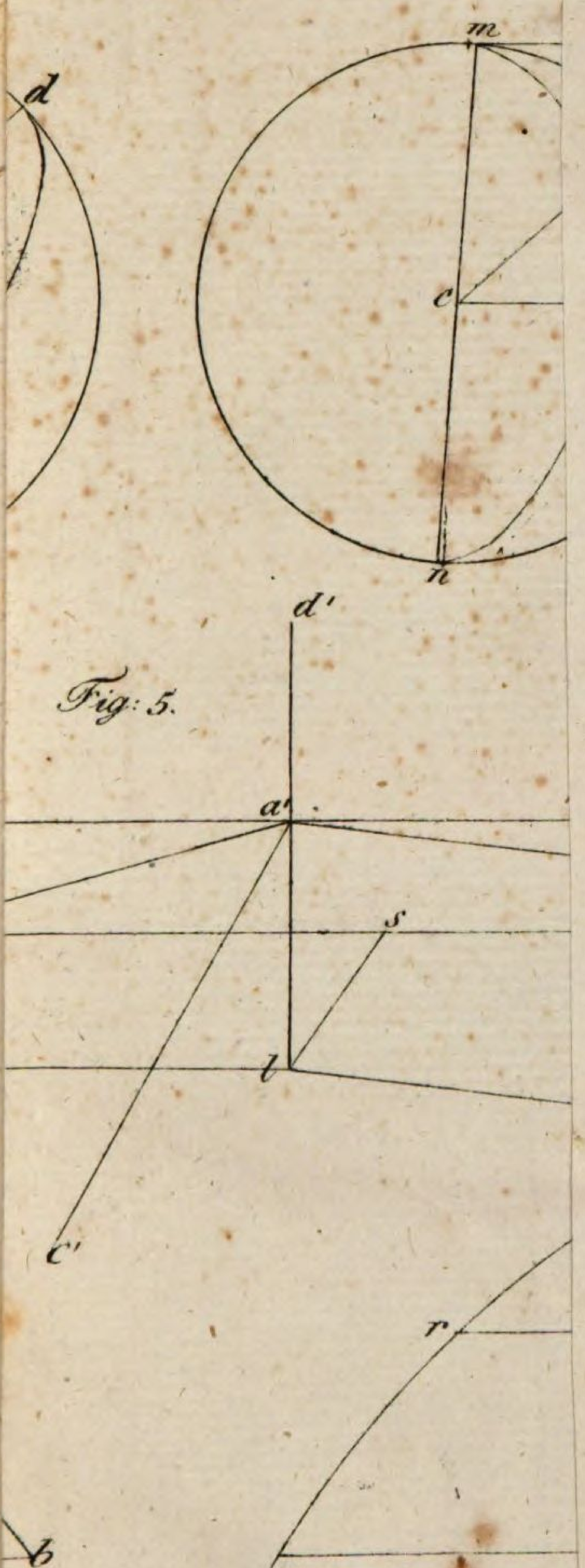


Fig: 5.

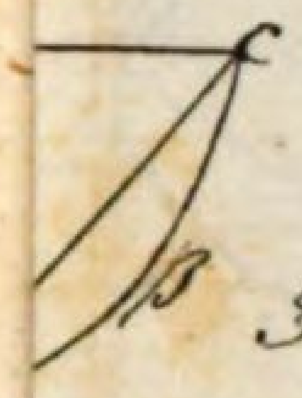


Fig: 25.

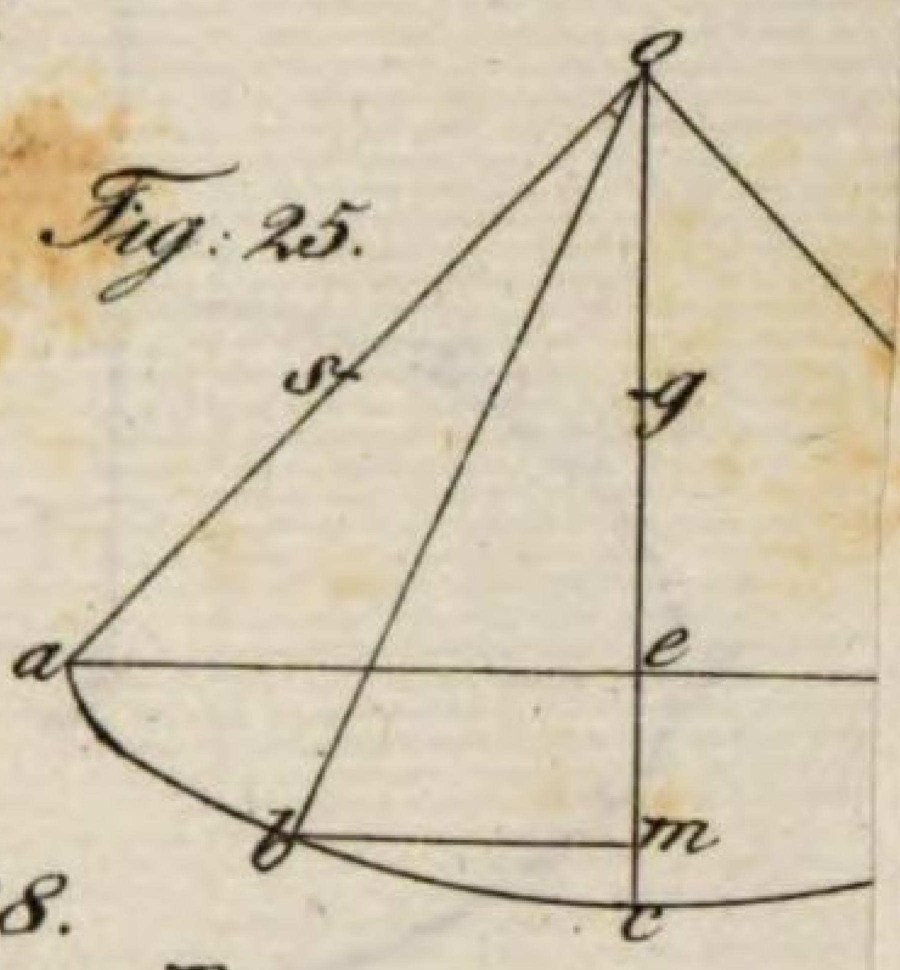
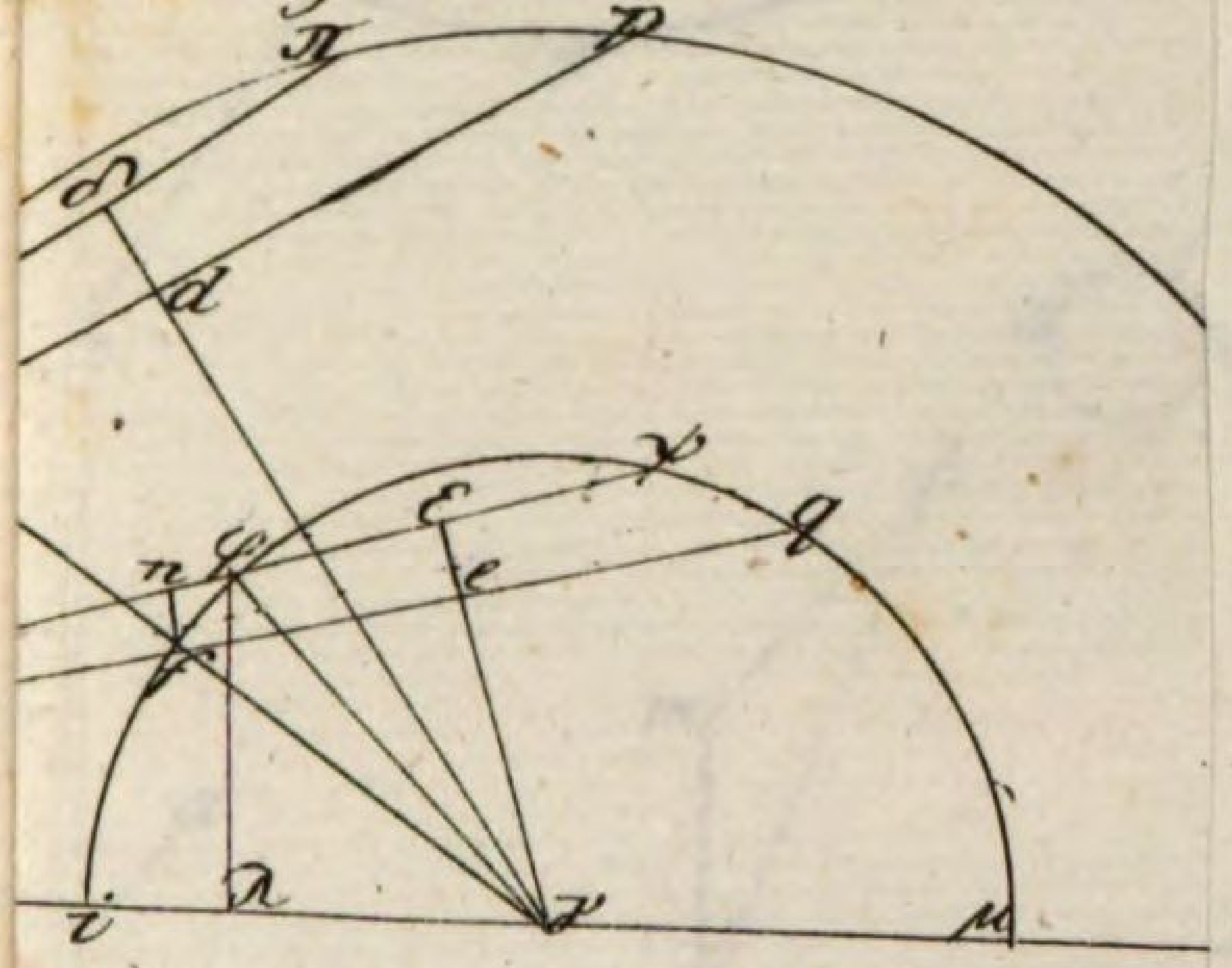


Fig: 28.



31.

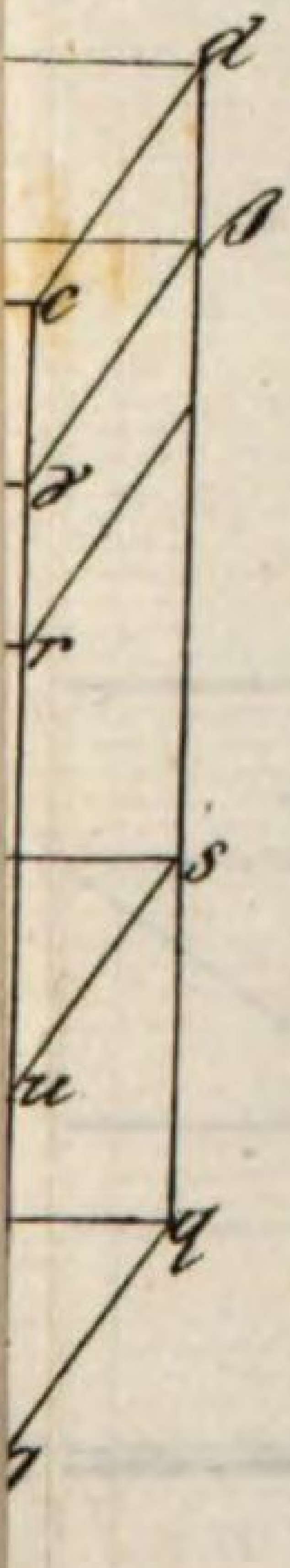
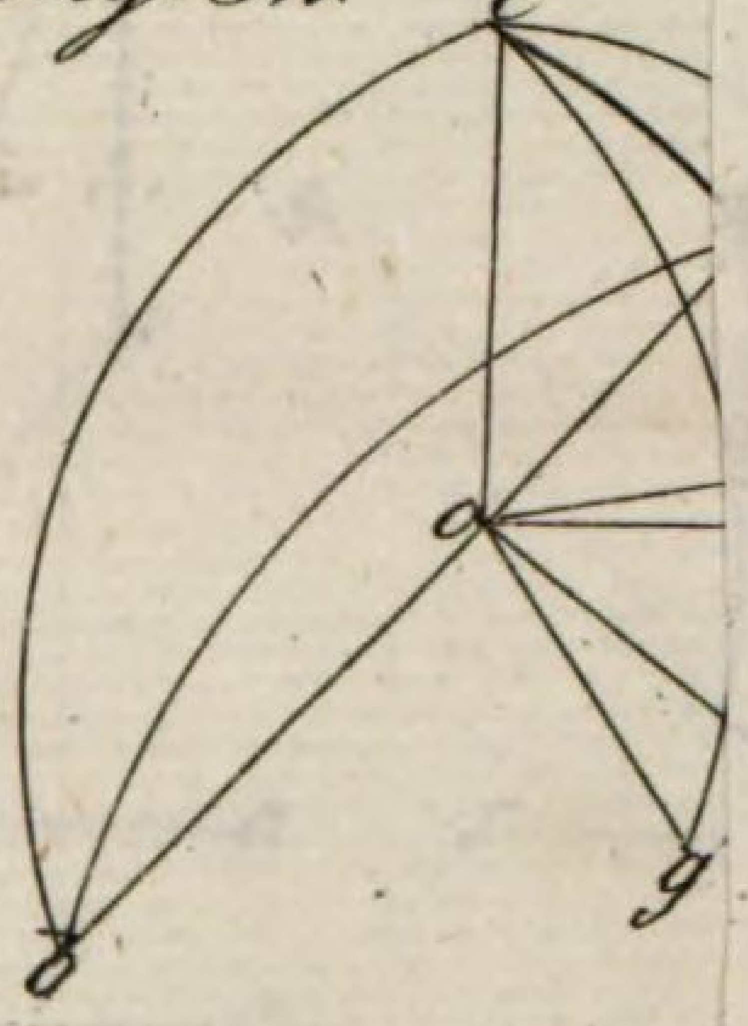


Fig: 32.



:45.

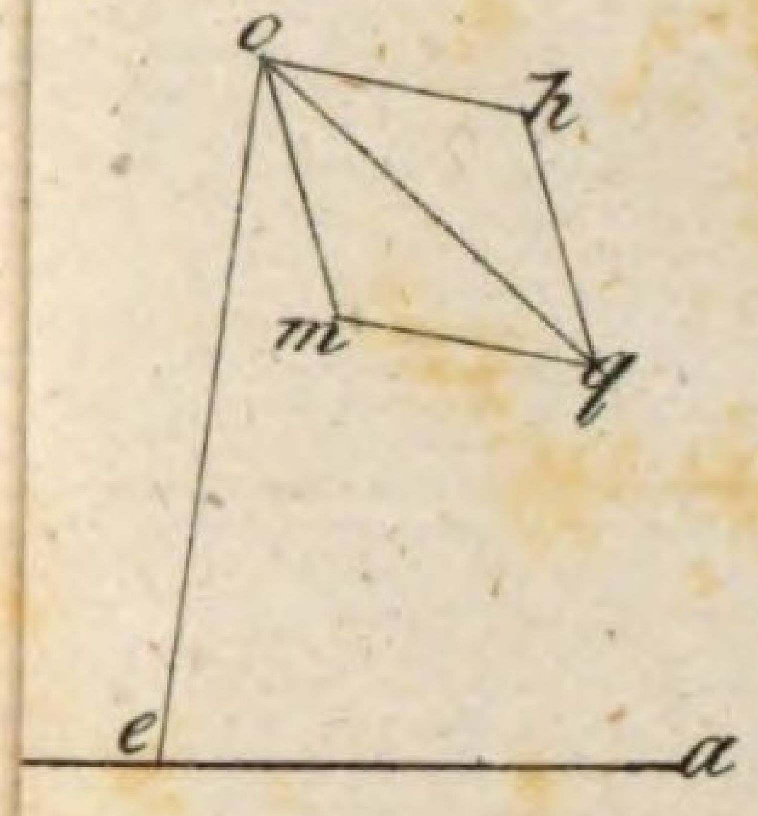


Fig: 47.

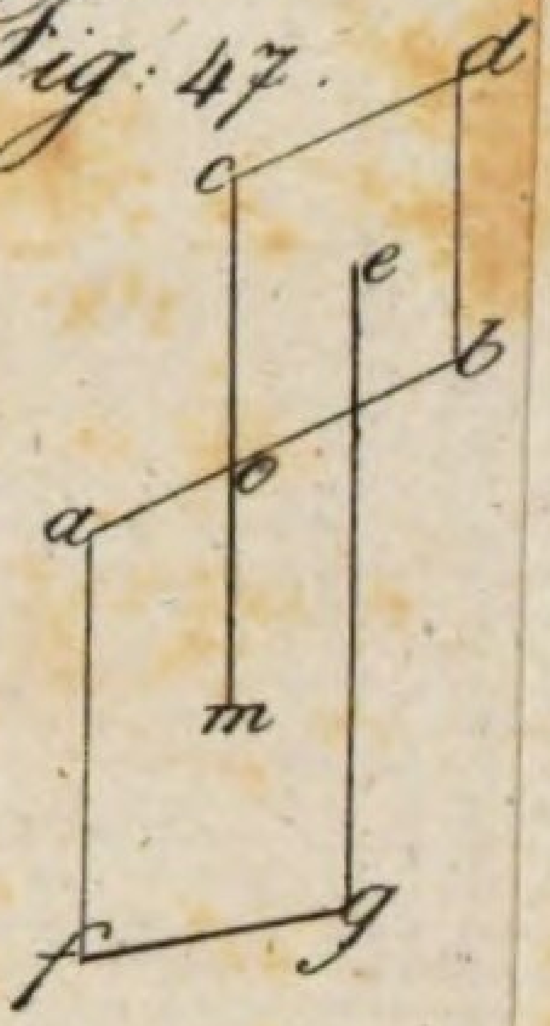


Fig: 53

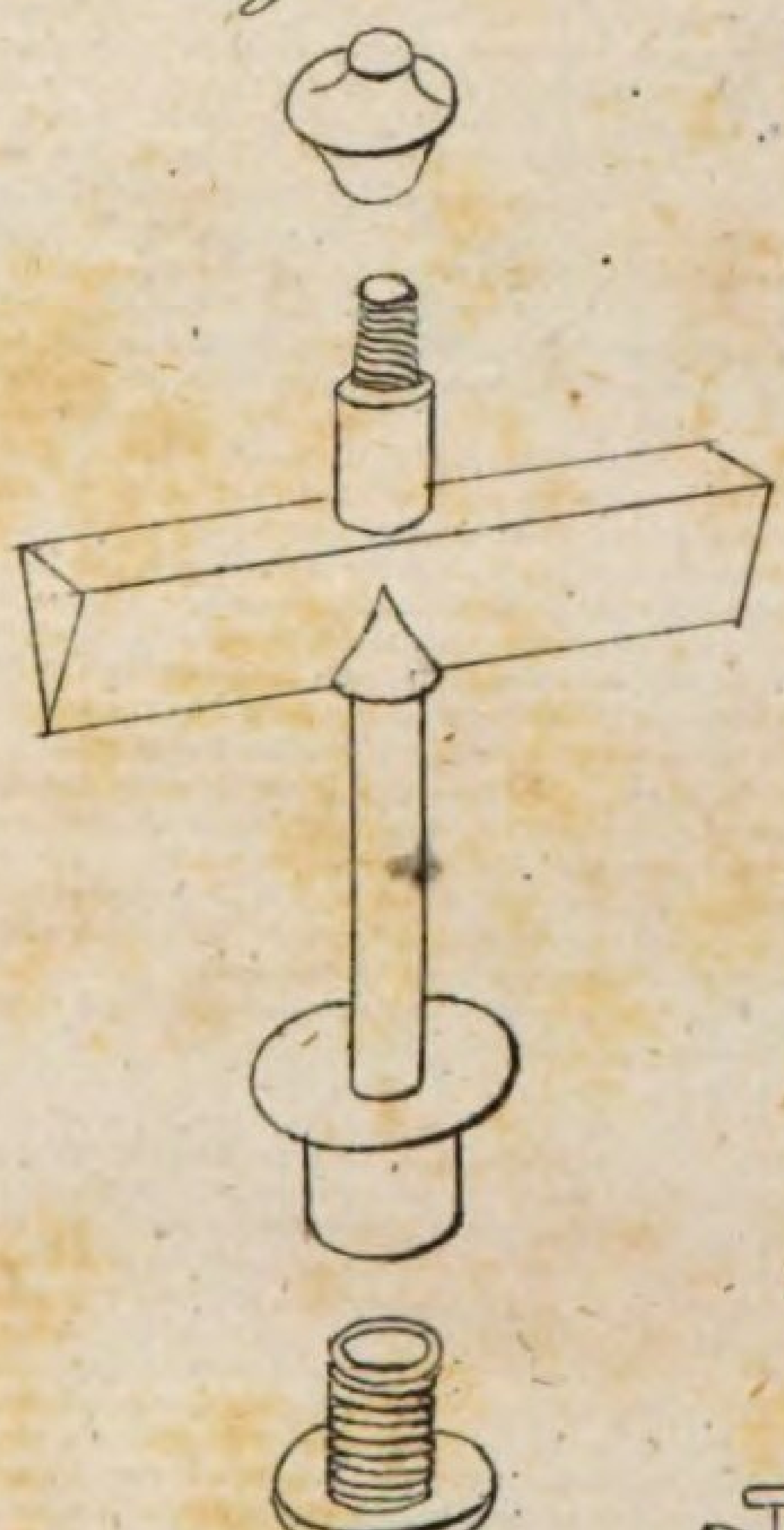
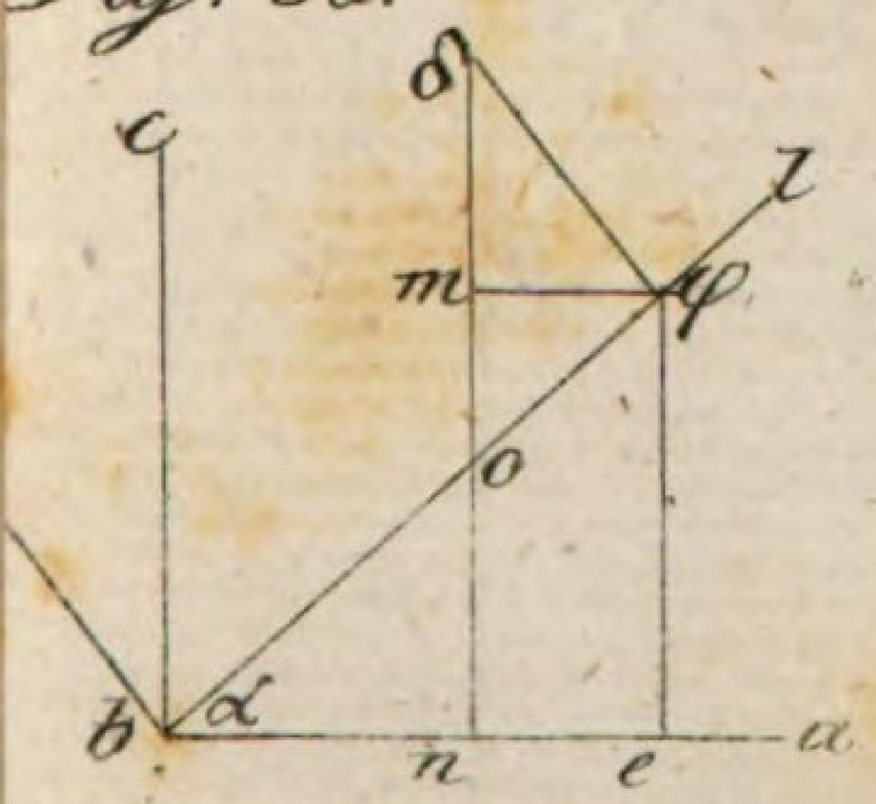


Fig: 58.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Brewer, Johann Paul,

Lehrbuch der Mechanik

Bd.: 2

Düsseldorf und Elberfeld 1830

Math.a. 49 h-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080583-2